

Capítulo 1

O plano hiperbólico

1.1 Superfícies de Riemann

Uma superfície S é um espaço topológico conexo de Hausdorff com uma colecção de transformações (φ_j, N_j) tal que:

- (1) os conjuntos N_j formam uma cobertura aberta de S , e
- (2) φ é um homeomorfismo de N_j em $\varphi_j(N_j)$, onde $\varphi_j(N_j)$ é um subconjunto aberto do plano complexo \mathbb{C} .

Uma superfície \mathcal{R} é uma superfície de Riemann se, para além das duas condições anteriores,

$$\varphi_i \varphi_j^{-1} : \varphi_j(N_i \cap N_j) \longrightarrow \mathbb{C}$$

é uma função analítica complexa sempre que $N_i \cap N_j \neq \emptyset$.

Uma das formas mais fáceis de construir uma superfície de Riemann é considerá-la como sendo o quociente relacionado com uma acção de um grupo adequado. Por exemplo, se G é um grupo gerado por $z \longrightarrow z + 1$, então \mathbb{C}/G é o plano perfurado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, e \mathcal{H}/G é o disco perfurado $\{z : 0 < |z| < 1\}$, (\mathcal{H} é o semi-plano superior complexo) e em cada caso a transformação quociente é $z \longrightarrow e^{2\pi iz}$. Estes dois exemplos dão-nos superfícies de Riemann que são o quociente do plano euclidiano \mathbb{C} , e do plano hiperbólico \mathcal{H} , respectivamente. De maneira mais geral, se G é algum grupo discreto actuando em \mathbb{C} ou \mathcal{H} então o quociente

por G é uma superfície de Riemann. O teorema da uniformização de Riemann, diz-nos que o recíproco também é válido.

Teorema 1.1.1 *(da uniformização de Riemann)* *Se uma superfície de Riemann é homeomorfa a uma esfera então é conformalmente equivalente à esfera de Riemann. Qualquer superfície de Riemann \mathcal{R} , que não homeomorfa a uma esfera, é conformalmente equivalente a um quociente da forma \mathbb{C}/G , ou \mathcal{H}/G , onde G é um grupo discreto de isometrias conformes actuando sem pontos fixos em \mathbb{C} , ou em \mathcal{H} . Para além disso, G é isomorfo ao grupo fundamental de \mathcal{R} .*

Uma isometria de \mathcal{H} é uma transformação de Möbius, e esta é designada de elíptica se tem um ponto fixo em \mathcal{H} . A presunção de que um grupo G é livre de elementos elípticos é uma grande restrição no grupo; por exemplo, na maioria dos casos, se G é um grupo de isometrias de \mathcal{H} , e se G não tem elementos elípticos, então G é discreto e \mathcal{H}/G é uma superfície de Riemann [A.F. Beardon].

Podemos classificar, de forma mais ou menos acessível, os grupos G actuando em \mathbb{C} que surgem aqui, e as únicas superfícies de Riemann da forma \mathbb{C}/G são o plano \mathbb{C} , o plano perfurado $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, e o toro. Assim, essencialmente, cada superfície de Riemann é da forma \mathcal{H}/G para algum grupo de isometrias do plano hiperbólico \mathcal{H} ; tais superfícies são conhecidas como superfícies hiperbólicas de Riemann. Estes factos implicam que cada superfície hiperbólica de Riemann \mathcal{R} herda, por projecção de \mathcal{H} , a sua própria geometria hiperbólica.

1.2 Imersões isométricas

Definição 1.2.1 *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ chama-se imersão isométrica quando $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.*

Também se diz que f preserva distâncias, quando é uma imersão isométrica, sendo, também, $f : M \rightarrow N$ sempre injectiva pois

$$f(x) = f(y) \Rightarrow d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Uma imersão isométrica quando for sobrejectiva toma o nome de *isometria*, e assim podemos verificar que toda a imersão isométrica $f : M \rightarrow N$ define uma isometria de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$.

A composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria são, ainda, isometrias.

Definição 1.2.2 *Sejam X um conjunto, (M, d) um espaço métrico e $f : X \rightarrow M$ uma aplicação injectiva. Para cada par de pontos $x, y \in X$ ponhamos $d'(x, y) = d(f(x), f(y))$. Isto define uma métrica d' em X chamada a métrica induzida por f .*

Esta métrica é a única métrica em X que torna $f : X \rightarrow M$ uma imersão isométrica.

Exemplo 1.2.1 *Em $X \rightarrow f(X) \subset M$ é induzida uma métrica pela aplicação inclusão $i : X \rightarrow M$ tal que $i(x) = x$, $x \in X$.*

Um dos métodos mais frequentes de introduzir uma métrica num conjunto X é induzi-la através de uma aplicação injectiva $f : X \rightarrow M$ de X num espaço métrico M .

Definição 1.2.3 *Seja $J \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e X um espaço métrico. Uma curva $\gamma : J \rightarrow X$ é designada de curva geodésica se cada ponto $c \in J$ tem uma vizinhança $U \subset J$ tal que a restrição de $\gamma : U \rightarrow X$ preserva distâncias.*

Um exemplo básico de espaço métrico é o conjunto dos números reais equipado com a métrica $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Como é importante que saibamos quais são as isometrias presentes em \mathbb{R} apresentamos o resultado seguinte.

Teorema 1.2.1 *Uma isometria $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma translação $x \rightarrow x + a$ ou uma reflexão $x \rightarrow b - x$.*

Demonstração: Para uma dada isometria σ em \mathbb{R} , seja τ a reflexão ou translação que coincide com σ em 0 e em 1. Vamos provar que $\sigma = \tau$. Supondo-se que, por um momento, $c \in \mathbb{R}$ é um ponto onde $\tau(c) \neq \sigma(c)$: isto implicaria que o ponto $a = \sigma(0) = \tau(0)$ é o ponto médio de $\tau(c)$ e $\sigma(c)$ já que

$$d(\sigma(c), a) = d(\sigma(c), \sigma(0)) = d(c, 0) = d(\tau(c), \tau(0)) = d(\tau(c), a).$$

De forma semelhante, $b = \sigma(1) = \tau(1)$ é o ponto médio de $\tau(c)$ e $\sigma(c)$, contradizendo $a \neq b$. ■

Lema 1.2.1 *Seja u um ponto do intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ e $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva geodésica com $\gamma(u) = 0$. Podemos encontrar $\epsilon = \pm 1$ tal que $\gamma(t) = \epsilon(t - u)$, com $t \in J$.*

Demonstração: Escolhamos uma vizinhança aberta $U \subseteq J$ de um dado ponto u tal que a restrição de γ a U preserva as distâncias. Concluimos da prova do teorema anterior que a restrição de γ a U é uma função afim. Segue-se que γ é diferenciável em U com derivada constante. Usando o facto de que o conjunto \mathbb{R} é conexo, concluimos que γ' é globalmente constante em J . O resultado pretendido sai assim do cálculo elementar. ■

1.3 A métrica hiperbólica

Seja \mathbb{C} o plano complexo. Vamos usar as notações usuais para as partes real e imaginária de um complexo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(z) = x$, $\text{Im}(z) = y$. O semi-plano $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, equipado com a métrica

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \quad (1)$$

torna-se um modelo do plano hiperbólico ou plano de Lobachevski.

Veremos que o papel das geodésicas, as curvas mais curtas, em relação a esta métrica, é desempenhado por linhas rectas e semi-circunferências ortogonais ao eixo real $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$. Quaisquer dois pontos em \mathcal{H} podem ser ligados por uma única geodésica, e a distância entre estes pontos é calculada ao longo desta geodésica. No entanto, existe mais do que uma geodésica que passa por um determinado ponto z que não está na geodésica L e que não intersecta L , como mostra a Figura 1-1.

De facto, todas as geodésicas que passam por z fora da região a cinzento não intersectam L . Isto significa que a geometria presente em \mathcal{H} não é euclidiana, pois o quinto postulado dos *Elementos de Euclides*, o axioma das paralelas, não se verifica aqui. A métrica (1) em \mathcal{H} é designada de métrica hiperbólica.

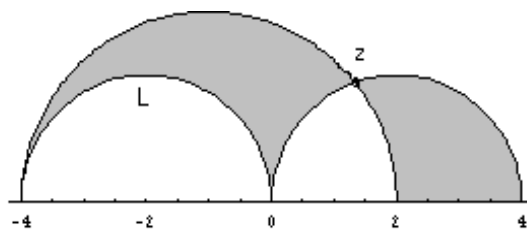


Figura 1-1: Axioma das paralelas

Seja $I = [0, 1]$ e $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$ um caminho diferenciável por troços

$$\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathcal{H} : t \in I\}.$$

Então o comprimento hiperbólico $h(\gamma)$ do arco γ é dado por

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right| dt}{y(t)}.$$

Definição 1.3.1 A distância hiperbólica $\rho(z, w)$ entre dois pontos $z, w \in \mathcal{H}$ é definida pela fórmula

$$\rho(z, w) = \inf h(\gamma),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todo o γ que une z a w em \mathcal{H} .

É fácil de ver que ρ é não negativa, simétrica e satisfaz a desigualdade triangular

$$\rho(z, w) \leq \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w),$$

isto é, é de facto uma função distância em \mathcal{H} .

Vamos considerar agora um grupo de matrizes reais $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $\det(g) = ad - bc = 1$. Como é habitual $\text{tr}(g) = a + d$ é o traço da matriz g . Este grupo é chamado de grupo unimodular e é denotado por $SL(2, \mathbb{R})$.

O conjunto das transformações de Möbius de \mathbb{C} em \mathbb{C} da forma

$$\left\{ z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} \quad (2)$$

formam um grupo tal que o produto de duas transformações correspondem ao produto das matrizes correspondentes e a inversa da transformação corresponde à inversa da matriz. Cada transformação T da forma (2) é representada por um par de matrizes $\pm g \in SL(2, \mathbb{R})$. Assim, o grupo de todas as transformações (2), designado por $PSL(2, \mathbb{R})$, é isomorfo a $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$, onde I_2 é matriz identidade 2×2 , e escrevemos $PSL(2, \mathbb{R}) \approx SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$. A transformação identidade em $PSL(2, \mathbb{R})$ vai ser denotada por Id . Temos, também, que $tr(-g) = -tr(g)$, e assim,

$$tr^2(T) = tr^2(g) \quad \text{e} \quad tr(T) = |tr(g)|$$

são funções bem definidas de T .

Note-se que o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ contém todas as transformações de Möbius da forma $z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e $\Delta = ad - bc > 0$ já que dividindo o numerador e denominador por $\sqrt{\Delta}$ obtemos uma nova matriz para este de determinante 1. Em particular, $PSL(2, \mathbb{R})$ contém todas as transformações da forma $z \longrightarrow az + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$), e a transformação $z \longrightarrow -\frac{1}{z}$.

Teorema 1.3.1 $PSL(2, \mathbb{R})$ actua em \mathcal{H} por homeomorfismos.

Demonstração: Primeiro mostramos que qualquer transformação (2) transforma \mathcal{H} em si mesmo. Seja $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, e $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Então

$$w = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2},$$

e assim

$$\text{Im}(w) = \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i|cz + d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}. \quad (3)$$

Logo, $\text{Im}(z) > 0$ implica $\text{Im}(w) > 0$. Agora o resultado do teorema sai da continuidade

de $T(z)$ e da sua inversa. ■

Definição 1.3.2 *Um transformação de \mathcal{H} em \mathcal{H} é chamada de isometria se esta preserva a distância hiperbólica em \mathcal{H} .*

O conjunto de todas as isometrias de \mathcal{H} formam um grupo, e vamos denotá-lo por $Isom(\mathcal{H})$.

Teorema 1.3.2 $PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathcal{H})$.

Demonstração: Pelo teorema 9 todas as transformações em $PSL(2, \mathbb{R})$ transformam \mathcal{H} em \mathcal{H} . Mostremos que, se $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$ é um caminho diferenciável por troços em \mathcal{H} então para qualquer $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ teremos $h(T(\gamma)) = h(\gamma)$.

Suponha-se que $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$ é dado por $z(t) = (x(t), y(t))$, e $w(t) = T(z(t)) = u(t) + iv(t)$.

Temos que

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}. \quad (4)$$

Por (3) $v = \frac{y}{|cz+d|^2}$, e assim $\left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{v}{y}$. Então

$$h(T(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dw}{dt}\right| dt}{v(t)} = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt}\right| dt}{v(t)} = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right| dt}{y(t)} = h(\gamma).$$

Desta invariância conclue-se logo a invariância da distância hiperbólica. ■

1.4 Geodésicas

Teorema 1.4.1 *As geodésicas em \mathcal{H} são semi-circunferências e linhas rectas ortogonais ao eixo real \mathbb{R} .*

Demonstração: Sejam z_1 e z_2 dois pontos em \mathcal{H} . Suponhamos primeiro que $z_1 = ia$, $z_2 = ib$ ($b > a$). Se $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$ é um caminho diferenciável por troços unindo ia e ib , com

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt}{y(t)} \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right| dt}{y(t)} \geq \int_0^1 \frac{dy}{y} = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}, \quad (5)$$

mas $\ln \frac{b}{a}$ é o comprimento hiperbólico do segmento do eixo imaginário, unindo ia e ib , assim a geodésica que une ia e ib é o segmento do eixo que une os dois pontos.

Para valores arbitrários z_1 e z_2 em \mathcal{H} , seja L a única circunferência euclidiana ou linha recta ortogonal ao eixo real \mathbb{R} que passa por estes pontos.

A transformação

$$T(z) = -(z - \alpha)^{-1} + \beta, \quad (\text{Exercício 1})$$

para um ponto finito $\alpha \in \mathcal{H}$, pertence a $PSL(2, \mathbb{R})$, e para um certo β transforma L , que passa em α , no eixo imaginário.

Assim, pelo argumento do parágrafo anterior e pelo teorema 11 concluímos que a geodésica que une z_1 e z_2 é o segmento de L que os une. ■

Deste teorema saiem dois corolários, que são resultados bastante práticos.

Corolário 1.4.1 *Quaisquer dois pontos $z, w \in \mathcal{H}$ podem ser ligados por uma única geodésica, e a distância hiperbólica entre $z, w \in \mathcal{H}$ é igual ao comprimento hiperbólico do único segmento hiperbólico que une estes dois pontos, que denotamos por $[z, w]$.*

Corolário 1.4.2 *Se z e w são dois pontos distintos em \mathcal{H} , então*

$$\rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w),$$

se e só se $\xi \in [z, w]$.

Teorema 1.4.2 *Qualquer transformação em $PSL(2, \mathbb{R})$ transforma geodésicas em geodésicas em \mathcal{H} .*

Demonstração: Sejam $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, z e w dois pontos distintos de \mathcal{H} , e $\xi \in [z, w]$. Pelo teorema 11 e corolário 14, $T\xi \in [Tz, Tw]$, isto é, T transforma o segmento $[z, w]$ no

segmento $[Tz, Tw]$, e daí geodésicas em geodésicas. ■

Tomemos agora em conta a esfera de Riemann, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, e a razão cruzada de pontos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$, dada pela fórmula

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}.$$

Teorema 1.4.3 *Sejam $z, w \in \mathcal{H}$ ($z \neq w$) e considere-se a geodésica que une z e w com pontos extremos z^* e w^* em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, escolhida de tal forma que z esteja entre z^* e w . Então*

$$\rho(z, w) = \ln(w, z^*; z, w^*).$$

Demonstração: Como já vimos na demonstração do teorema 12 existe um elemento $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ que transforma a geodésica unindo z e w no eixo imaginário. Aplicando as transformações $z \rightarrow kz$ ($k > 0$) e $z \rightarrow -\frac{1}{z}$, tantas as vezes quantas as necessárias, podemos assumir que $T(z^*) = 0$ e $T(w^*) = \infty$ e $T(z) = i$. Então $T(w) = ri$ ($r > 1$), e por (1.2.1) $\rho(z, w) = \ln r$. Mas, $r = (ri, 0; i, \infty)$, e assim temos o resultado do teorema pois a razão cruzada é invariante sob transformações de Möbius[ver L. Ahlfors, “Complex Analysis”]. ■

Assim, nós podemos explicitar algumas fórmulas úteis para a distância hiperbólica.

Teorema 1.4.4 *Para $z, w \in \mathcal{H}$,*

$$\begin{aligned} (i) \rho(z, w) &= \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}; \\ (ii) \cosh \rho(z, w) &= 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}; \\ (iii) \sinh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] &= \frac{|z - w|}{2 (\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w))^{1/2}}; \\ (iv) \cosh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] &= \frac{|z - \bar{w}|}{2 (\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w))^{1/2}}; \\ (v) \tanh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] &= \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|. \end{aligned}$$

Demonstração: Provar a equivalência entre as fórmulas é uma mera questão de

cálculo. Por isso vamos só verificar (iii). Pelo teorema 11 o lado esquerdo da equação é invariante sob a transformação $T \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Ora se $z, w \in \mathcal{H}$, e $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, então mostra-se que

$$|Tz - Tw| = |z - w| |T'(z)T'(w)|^{1/2}. \quad (\text{Exercício 2})$$

Assim, pode-se, pelo resultado do parágrafo anterior, ver que o lado direito da equação também é invariante sob T .

Seja L a única geodésica que passa por z e por w , e T_0 uma transformação que leva L no eixo imaginário. Agora, apenas resta mostrar que verifica-se (iii) quando z e w estão no eixo imaginário: $z = ia$, $w = ib$ ($a < b$). Vimos pela prova do teorema 11 que $\rho(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}$, e assim vê-se que a igualdade é válida. ■

Agora descrevemos a seguir um modelo da geometria hiperbólica no disco unitário

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

A transformação

$$f(z) = \frac{zi + 1}{z + i} \quad (6)$$

é uma transformação injectiva de \mathcal{H} em \mathcal{U} , assim ρ^* dada por

$$\rho^*(z, w) = \rho(f^{-1}z, f^{-1}w), z, w \in \mathcal{U}$$

é uma métrica em \mathcal{U} .

Usando o facto de que se $z \in \mathcal{H}$ e

$$f(z) = \frac{zi + 1}{z + i}, \frac{2|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{\text{Im}(z)}, \quad (\text{Exercício 3})$$

podemos ver que ρ^* pode ser identificada com a métrica proveniente do diferencial

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}. \quad (7)$$

Os dois modelos, até agora, apresentados são os modelos conhecidos como modelos de Poincaré na geometria hiperbólica, e cada um tem as suas vantagens de utilização. Por exemplo, \mathcal{H} é um modelo onde se trabalha as formas algébricas mais facilmente, enquanto os aspectos geométricos são mais facilmente estudados usando o modelo \mathcal{U} .

Cada métrica respectiva tem uma curvatura negativa, e é esta propriedade que confere à geometria hiperbólica o seu carácter particular. Uma das consequências mais significativas do valor da curvatura é o facto de que duas geodésicas se afastam uma da outra muito rapidamente. Para ilustrar isso numa situação concreta, por exemplo o perímetro de um círculo hiperbólico com um raio hiperbólico r é $2\pi \sinh r$, que cresce de forma exponencial com r quando comparado com o caso euclidiano $2\pi r$ que cresce de forma linear. Assim o plano hiperbólico parece ter muito mais espaço junto a uma das suas fronteiras no infinito do que o plano euclidiano; este facto faz com que exista muitos mais grupos discretos de isometrias em \mathcal{H} do que em \mathbb{C} .

Como uma isometria, que preserve a orientação de \mathcal{U} ou \mathcal{H} , é uma transformação de Möbius de \mathcal{U} ou \mathcal{H} neles mesmos, e ainda que qualquer transformação de Möbius entre \mathcal{U} e \mathcal{H} , em qualquer direcção, é uma isometria respeitante à respectiva métrica, podemos transferir ideias e fórmulas entre os dois modelos. Por exemplo, f é uma isometria de (\mathcal{H}, ρ) em (\mathcal{U}, ρ^*) . Assim simplificaremos a notação de comprimento e usaremos ρ em vez de ρ^* , pois o significado é o mesmo.

A circunferência $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é designada de circunferência principal; ela é a fronteira euclidiana de \mathcal{U} . De forma semelhante, a fronteira euclidiana de semi-plano \mathcal{H} , considerada como um subconjunto da esfera de Riemann, é $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. No modelo \mathcal{U} as geodésicas são segmentos de circunferências euclidianas ortogonais à circunferência principal e os seus diâmetros. Deixa-se como exercício a obtenção das fórmulas das distâncias em \mathcal{U} , análogas às fórmulas do teorema 17.

A fórmula (5) mostra que o conjunto de pontos na fronteira euclidiana do plano hiperbólico é caracterizado pela propriedade de que a distância hiperbólica destes pontos a qualquer outro ponto no plano hiperbólico é infinita; este conjunto é designado por *pontos no infinito*.

Seja $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ o fecho euclidiano de \mathcal{H} , e $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup \Sigma$ o fecho euclidiano de \mathcal{U} .
Vemos que o fecho euclidiano de \mathcal{H} (resp. \mathcal{U}) é o fecho de \mathcal{H} (resp. \mathcal{U}) em $\hat{\mathbb{C}}$.

Capítulo 2

Isometrias

Vimos, anteriormente (Teorema 11), que as transformações em $PSL(2, \mathbb{R})$ são isometrias de \mathcal{H} . Seja $PS^*L(2, \mathbb{R}) = S^*L(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ onde $S^*L(2, \mathbb{R})$ é o grupo das matrizes reais

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \det(g) = \pm 1.$$

O conjunto $PS^*L(2, \mathbb{R})$ contém o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ como um subgrupo de índice 2.

O teorema seguinte identifica todas as isometrias do plano hiperbólico \mathcal{H} .

Teorema 2.0.5 *O grupo $Isom(\mathcal{H})$ é gerado pelas transformações de Möbius (2) em $PSL(2, \mathbb{R})$ juntamente com $z \rightarrow -\bar{z}$, e é isomórfico a $PS^*L(2, \mathbb{R})$. O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ é um subgrupo de $Isom(\mathcal{H})$ de índice 2.*

Demonstração: Seja ϕ uma isometria de \mathcal{H} . Repetindo os argumentos usados na prova do teorema 15 concluímos que ϕ transforma geodésicas em geodésicas. Sendo I o semi-eixo imaginário positivo, $\phi(I)$ é uma geodésica, e de acordo com o exercício 1, existe uma isometria $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ que transforma $\phi(I)$ em I . Aplicando transformações $z \rightarrow kz$ ($k > 0$) e $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ como foi feito na prova do teorema 16 podemos assumir que $g\phi$ fixa i e transforma os segmentos de recta (i, ∞) e $(0, i)$ neles mesmos, e assim $g\phi$ fixa cada ponto de I .

Agora, considere-se $z = x + iy \in \mathcal{H}$, e $g\phi(z) = u + iv$. Para o valor positivo t ,

$$\rho(z, it) = \rho(g\phi(z), g\phi(it)) = \rho(u + iv, it)$$

e pelo teorema 17(iii),

$$[x^2 + (y - t)^2] v = [u^2 + (v - t)^2] y.$$

Como isso se verifica para todo o t positivo, dividindo ambos os membros da equação anterior por t^2 e tomando o limite com $t \rightarrow \infty$, temos $v = y$, e $x^2 = y^2$. Assim,

$$g\phi(z) = z \text{ ou } -\bar{z}. \quad (8)$$

Como as isometrias são contínuas, exercício 7, apenas umas das equações (8) são válidas para todo o z em \mathcal{H} . Se $g\phi(z) = z$, então $\phi(z)$ é uma transformação de Möbius da forma (2). Se $g\phi(z) = -\bar{z}$, temos

$$\phi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \text{com} \quad ad - bc = -1. \quad (9)$$

Assim, identificamos todas as isometrias de \mathcal{H} . Também podemos verificar, de forma relativamente fácil, que todas as transformações da forma (2) e (9) formam um grupo que é isomorfo ao grupo $PS^*L(2, \mathbb{R})$.

O sinal do determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ determina a orientação de uma isometria; assim transformações em $PSL(2, \mathbb{R})$ preservam as orientações enquanto que transformações da forma (9), em particular, $z \rightarrow -\bar{z}$, são isometrias que invertem o sentido da orientação. ■

Consideremos agora o espaço tangente a \mathcal{H} num ponto z , $T_z\mathcal{H} \approx \mathbb{C}$. A métrica Riemanniana (1) em \mathcal{H} é induzida pelo seguinte produto interno em $T_z\mathcal{H}$: para $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ e

$\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ em $T_z\mathcal{H}$

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \frac{1}{(\operatorname{Im}(z))^2} (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2). \quad (10)$$

Denotemos a norma em $T_z\mathcal{H}$ correspondente a este produto interno por $\|\cdot\|$. Já que as isometrias de \mathcal{H} são transformações diferenciáveis, elas actuam no conjunto dos vectores tangentes $T\mathcal{H}$ por diferenciais preservando a norma no mesmo conjunto. Pela identidade da polarização, para quaisquer $\xi, \eta \in T_z\mathcal{H}$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{2} (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 - \|\xi - \eta\|^2);$$

assim o produto interno e conseqüente valor absoluto de um ângulo entre vectores tangentes são também preservados.

Definimos ângulo entre duas geodésicas em \mathcal{H} no seu ponto de intersecção z como sendo o ângulo dos seus vectores tangentes em $T_z\mathcal{H}$. Esta noção de ângulo coincide com a de ângulo euclidiano.

Definição 2.0.1 *Uma transformação de \mathcal{H} é designado de conforme se esta preserva ângulos, e anti-conforme se esta preserva o valor absoluto dos ângulos mas muda-lhes o sinal.*

Teorema 2.0.6 *Qualquer transformação de $PSL(2, \mathbb{R})$ é conforme; qualquer transformação do tipo (9) é anti-conforme.*

Demonstração: Qualquer $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$ é conforme no plano complexo para qualquer $z \in \mathbb{C}$, já que a primeira derivada de $T(z)$ é não nula, e a transformação $z \rightarrow -\bar{z}$ é obviamente anti-conforme. ■

Segue-se do exercício 8, que a família de todos os discos euclidianos coincide com a família de todos os discos hiperbólicos, e assim temos o seguinte resultado.

Teorema 2.0.7 *A topologia em \mathcal{H} induzida pela métrica hiperbólica é a mesma do que a topologia induzida pela métrica euclidiana.*

2.1 O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$

Existem três tipos de elementos em

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ z \longrightarrow T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : ad - bc = 1 \right\}$$

distinguidos pelo valor do traço da matriz correspondente: $Tr(T) = |a + d|$. Se $Tr(T) < 2$, T é designada de elíptica; se $Tr(T) = 2$ é designada de parabólica; se $Tr(T) > 2$ é designada de hiperbólica.

A terminologia pode ser explicada através da acção linear das correspondentes matrizes em \mathbb{R}^2 . Uma matriz em $PSL(2, \mathbb{R})$ é hiperbólica se e só se é diagonalizável em \mathbb{R} , ou conjugada em $SL(2, \mathbb{R})$ a uma única matriz $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \neq 1$, e é elíptica se e só se é conjugada em $SL(2, \mathbb{R})$ a uma única matriz $\begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Segue-se que as curvas invariantes para transformações lineares hiperbólicas de \mathbb{R}^2 são hipérboles, e as curvas invariantes para transformações lineares elípticas são elipses. As transformações parabólicas são denominadas por analogia, como transformações intermédias entre as hiperbólicas e as elípticas.

Os pontos fixos de $T(z) \in PSL(2, \mathbb{R})$ são as soluções da equação $T(z) = z$, e assim podemos verificar que as transformações hiperbólicas têm dois pontos fixos em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, um repulsor e um atrator. Uma transformação parabólica tem um ponto fixo em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, e uma transformação elíptica tem um par de complexos conjugados como pontos fixos, e assim, um ponto fixo em \mathcal{H} . A transformação $T(z) \in PSL(2, \mathbb{R})$ fixa o ∞ se e só se $c = 0$ e daí é da forma $z \longrightarrow az + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$). Se $a = 1$, a transformação é parabólica; se $a \neq 1$, é hiperbólica e o seu segundo ponto fixo é $\frac{b}{1-a}$.

Definição 2.1.1 *Uma geodésica em \mathcal{H} unindo dois pontos fixos de uma transformação hiperbólica T é designado de eixo de T , e é denotado de A_T .*

Como já vimos, pelo teorema 16, T transforma A_T em si mesmo.

Definição 2.1.2 Um subgrupo Γ de $Isom(\mathcal{H})$ é designado de discreto se a topologia induzida em Γ é uma topologia discreta, isto é, se Γ é um conjunto discreto no espaço topológico $Isom(\mathcal{H})$.

Definição 2.1.3 Um subgrupo discreto de $Isom(\mathcal{H})$ é designado de grupo Fuchsiano se este consiste em transformações que preservam a orientação, por outras palavras, um grupo Fuchsiano é subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Para algum grupo discreto Γ de $Isom(\mathcal{H})$, o seu subgrupo Γ^+ de índice ≤ 2 , que consiste nas transformações que preservam a orientação é um grupo Fuchsiano. Assim, o principal ingrediente no estudo dos subgrupos discretos de isometrias de \mathcal{H} é o estudo dos grupos Fuchsianos.

2.1.1 Propriedades algébricas dos grupos Fuchsianos

Se G é um grupo qualquer e $g \in G$, então o centralizador de g em G é definido por

$$C_G(g) = \{h \in G : hg = gh\}.$$

Lema 2.1.1 Se $ST = TS$ então S transforma o conjunto dos pontos fixos de T em si mesmo.

Demonstração: Suponha-se que T fixa p . Então $S(p) = ST(p) = TS(p)$ e assim $S(p)$ é também fixo por T . ■

Vejamos os centralizadores dos elementos parabólicos, elípticos e hiperbólicos em $PSL(2, \mathbb{R})$. Suponha-se $T(z) = z + 1$. Se $S \in C_{PSL(2, \mathbb{R})}(T)$ então $S(\infty) = \infty$. Assim, $S(z) = az + b$. $ST = TS$ dá-nos $a = 1$. Então

$$C_{PSL(2, \mathbb{R})}(T) = \{z \longrightarrow z + k : k \in \mathbb{R}\}.$$

O centralizador de uma transformação elíptica do disco unitário \mathcal{U} fixando 0 (isto é, $z \rightarrow e^{i\phi}z$) consiste em todas as transformações da forma

$$z \rightarrow \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

fixando 0, isto é, da forma $z \rightarrow e^{i\theta}z$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Seja $T(z) = \lambda z$ ($\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$) e $S \in C_{PSL(2, \mathbb{R})}(T)$. Então um cálculo directo mostra que S é dada por uma matriz diagonal e assim $S(z) = \mu z$ ($\mu > 0$). Deste raciocínio, deduzimos os seguintes resultados:

Teorema 2.1.1 *Dois elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$, diferentes dos elementos identidade, comutam se e só se têm o mesmo conjunto de pontos fixos.*

Teorema 2.1.2 *O centralizador em $PSL(2, \mathbb{R})$ de um elemento hiperbólico (resp. parabólico, elíptico) de $PSL(2, \mathbb{R})$ consiste em todos os elementos hiperbólicos (resp. parabólicos, elípticos) com o mesmo conjunto de pontos fixos, juntamente com o elemento identidade.*

Corolário 2.1.1 *Dois elementos hiperbólicos em $PSL(2, \mathbb{R})$ comutam se e só se eles têm os mesmos eixos.*

2.2 Classificação das isometrias do plano hiperbólico

Aqui, nesta secção será usado H para representar tanto \mathcal{H} como \mathcal{U} , fazendo-se a distinção entre os dois modelos quando necessário.

Existem três classes de isometrias conformes do plano hiperbólico H , nomeadamente as isometrias hiperbólicas, as isometrias parabólicas e as isometrias elípticas, todas definidas em relação aos pontos fixos. Aqui abordaremos o ponto de vista geométrico de cada uma delas, tendo em conta o facto que devemos evitar referir-nos a uma isometria do plano hiperbólico (H, ρ) como sendo apenas uma isometria hiperbólica, visto poder haver uma certa ambiguidade no sentido da frase.

Uma transformação de Möbius pode ser representada (a menos de um factor ± 1) por uma matriz 2×2 de determinante 1, e cada matriz deste género determina uma

transformação de Möbius. Assim, de um ponto de vista algébrico, podemos considerar as isometrias do plano hiperbólico como sendo matrizes do tipo 2×2 . Em particular, o grupo das isometrias conformes do modelo \mathcal{H} é $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$.

Uma isometria g de H pode ser classificada em termos do traço da sua matriz, da seguinte forma:

- (a) g é hiperbólica se e só se $|tr(g)| > 2$;
- (b) g é elíptica se e só se $0 \leq |tr(g)| < 2$;
- (c) g é parabólica, ou a identidade I , se e só se $|tr(g)| = 2$.

Apesar de (a), (b), (c) fornecerem um teste simples aritmético para determinar o tipo de isometria, este não é muito útil em discussões geométricas. Assim, apresenta-se, também, a seguir um método para classificar as isometrias de forma geométrica, que é baseado na ideia de reflexão ao longo de uma geodésica hiperbólica, para além de descrever a acção dos três tipos de isometrias, realçando os seus pontos comuns em vez das suas diferenças.

Primeiro vamos descrever o que entendemos por reflexão ao longo de uma circunferência euclidiana. Dada uma circunferência euclidiana C (ou uma linha recta) temos a noção de pontos opostos em relação a esta circunferência. Preferimos a definição geométrica destes pontos, de forma a que digamos que z e z' são opostos se e só se cada circunferência euclidiana que passe por estes seja ortogonal a C . A transformação $z \rightarrow z'$ é uma involução, isto é, $(z')' = z$ e estende-se de forma natural a C de forma a fixar todos os pontos de C . Esta transformação é uma reflexão ao longo de C . Note-se que como as transformações de Möbius transformam circunferências em circunferências e preservam a ortogonalidade, é verdade que se z e z' são pontos opostos em relação a C , então para toda a transformação de Möbius g , os pontos $g(z)$ e $g(z')$ são pontos opostos em relação a $g(C)$. Note-se também que se C é a circunferência dada por $|z| = r$ então a reflexão ao longo de C é a transformação

$$z \rightarrow \frac{r^2}{\bar{z}}. \quad (11)$$

A reflexão ao longo de uma geodésica hiperbólica γ é, por definição, a reflexão ao longo da única circunferência euclidiana que contém γ . Como exemplos, se $H = \mathcal{U}$ e γ é o

diâmetro real $(-1, 1)$, então a reflexão ao longo de γ é a transformação $z \longrightarrow \bar{z}$; se $H = \mathcal{H}$ e γ é a geodésica que está no eixo imaginário, então a reflexão ao longo de γ é dada por $z \longrightarrow -\bar{z}$.

Da descrição anterior verifica-se que a reflexão ao longo de uma geodésica é uma isometria anti-conforme de H ; e a composição de duas reflexões é uma isometria conforme.

Finalmente, se g é uma reflexão ao longo de γ , dizemos que γ é o eixo de g , que não é mais do que o conjunto dos pontos fixos de g . Dada uma geodésica γ em H vamos denotar por R_γ a reflexão ao longo de γ .

2.2.1 As isometrias hiperbólicas de H

Uma isometria hiperbólica f tem dois pontos fixos distintos em ∂H . Cada arco circular unindo os dois pontos fixos é invariante sob f , e é designado de hiperciclo de f . Exactamente apenas um hiperciclo é uma geodésica hiperbólica, e este é designado de eixo A_f de f . Devemos pensar em f como sendo uma translação do plano hiperbólico ao longo de A_f . As formas algébricas mais simples destas isometrias são do tipo $f(k) = kz$, $H = \mathcal{H}$, e os pontos fixos são 0 e ∞ , onde $0 < k < 1$ ou $k > 1$. A isometria hiperbólica mais geral é conjugada por uma transformação de Möbius a f para um certo k , mais precisamente, se g é uma isometria hiperbólica de \mathcal{U} , então existe alguma transformação de Möbius $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{H}$, e um certo k , tal que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

Uma isometria hiperbólica move os pontos ao longo de uma família de hiperciclos, incluindo o eixo da translação, de um ponto fixo α ao outro ponto fixo β .

Vamos considerar duas geodésicas α e β em \mathcal{H} dadas pelas circunferências $|z| = r_\alpha$ e $|z| = r_\beta$, respectivamente. Então R_α e R_β podem ser encontradas por (11) e vemos que

$$R_\alpha \circ R_\beta = \left(\frac{r_\beta}{r_\alpha} \right)^2 z$$

que é da forma $z \longrightarrow kz$. Esta é uma isometria hiperbólica com o eixo ao longo do eixo imaginário (que é a única circunferência euclidiana que é ortogonal a α e a β). Além do

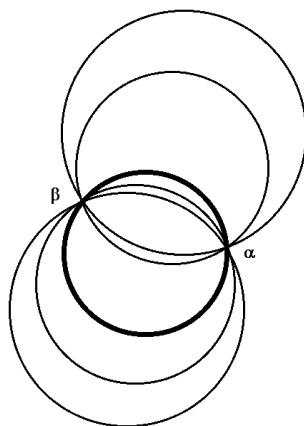


Figura 2-1: Uma isometria hiperbólica é uma forma de translação

mais, se z está neste eixo então

$$\rho(R_\alpha R_\beta(z), z) = 2 \log(r_\beta/r_\alpha) = 2 \text{dist}(\alpha, \beta), \quad (12)$$

onde $\text{dist}(\alpha, \beta)$ é distância hiperbólica “mais curta” entre as geodésicas α e β .

Como qualquer isometria hiperbólica é conjugada a uma isometria da forma $z \rightarrow kz$ actuando em \mathcal{H} , este exemplo é geral. Assim, α e β são geodésicas em H cujos fechos no plano extendido são disjuntos, então a reflexão em uma, seguida por uma reflexão na outra é uma isometria cujo eixo está ao longo da circunferência euclidiana que é simultaneamente ortogonal a α e a β . Além do mais, como os dois termos em (12) são invariantes sob isometrias de H , (12) continua válida neste caso geral.

O argumento recíproco também é válido. Dada uma qualquer isometria hiperbólica g com eixo γ , $d = \rho(g(z), z)$, $z \in \gamma$, e α, β duas geodésicas quaisquer ortogonais a γ que estão a uma distância $\frac{1}{2}d$ (medida ao longo de γ) então g é $R_\alpha \circ R_\beta$, ou $R_\beta \circ R_\alpha$. Em qualquer evento, o par não ordenado $\{g, g^{-1}\}$ é o mesmo do que o par não ordenado $\{R_\alpha \circ R_\beta, R_\beta \circ R_\alpha\}$.

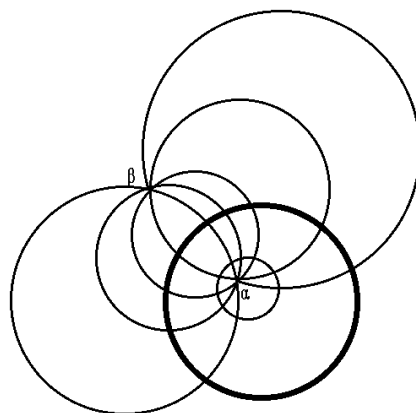


Figura 2-2: Uma isometria elíptica assemelha-se a uma rotação euclidiana

2.2.2 As isometrias elípticas de H

Uma isometria elíptica f tem dois pontos fixos α e β , com $\alpha \in H$, β no exterior de H , e α, β pontos opostos em relação a ∂H . Se $H = \mathcal{H}$ então $\beta = \bar{\alpha}$ e se $H = \mathcal{U}$ então $\beta = 1/\bar{\alpha}$. Cada circunferência euclidiana que tem α e β como pontos opostos é invariante sob f , e é designada de um horiciclo de f . De facto, os horiciclos de \mathcal{H} são as circunferências hiperbólicas com centro α , e f actua como uma rotação de \mathcal{H} centrada em α . A forma algébrica mais simples destas isometrias são do tipo $f(z) = kz$, $H = \mathcal{U}$, $\alpha = 0$ e $\beta = \infty$, onde $|k| = 1$, $k \neq 1$.

Uma isometria elíptica move os pontos à volta do ponto α ao longo da circunferência hiperbólica nele centrada. Imaginando um objecto a mover-se ao longo desta circunferência, este sofria uma rotação em que o seu tamanho ia-se modificando à medida que esta se ia aproximando da fronteira de \mathcal{U} , ficando cada vez mais pequena, e maior ao afastar-se.

Uma isometria elíptica mais geral é conjugada por uma transformação de Möbius a f para um certo k .

Consideremos duas geodésicas α e β , em \mathcal{U} , que se cruzam na origem. Então a reflexão hiperbólica em cada coincide com a reflexão euclidiana, e assim a composição $R_\alpha R_\beta$ é uma reflexão euclidiana centrada na origem, logo uma reflexão hiperbólica centrada na origem. Como cada isometria elíptica é conjugada a alguma transformação da forma $R_\alpha R_\beta$, vemos

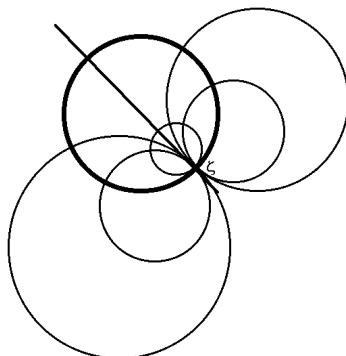


Figura 2-3: Uma isometria parabólica assemelha-se a uma translação euclidiana

que a composição de duas reflexões em qualquer par de geodésicas que se cruzam, em H , é uma isometria elíptica, e toda a isometria elíptica pode ser expressa desta forma.

2.2.3 As isometrias parabólicas de H

Uma isometria parabólica f tem exactamente um ponto fixo ζ na esfera de Riemann, e este está em ∂H . Podemos pensar em f como o caso limite dos dois tipos de isometrias anteriores quando os seus pontos fixos movem-se simultâneamente, e assim as isometria parabólicas são conhecidas como limite de rotações. Cada circunferência que é internamente tangente a ∂H em ζ é invariante sob f , e esta é chamada de horiciclo de f . A forma algébrica mais simples destas isometrias é quando $H = \mathcal{H}$, e $\zeta = \infty$; assim $f(z) = z+a$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Uma isometria parabólica mais geral é conjugada por uma transformação de Möbius a f para um certo a .

Uma isometria parabólica move os pontos ao longo dos horiciclos. Imaginando um objecto a mover-se ao longo destes, este sofria uma rotação em que o seu tamanho ia-se modificando à medida que esta se ia aproximando da fronteira de \mathcal{U} , ficando cada vez mais pequena, e maior ao afastar-se.

Ao analisar as isometrias parabólicas em termos de composições, este caso é semelhante ao caso elíptico, com excepção que as duas geodésicas que se considere têm um ponto comum na fronteira de H . Um caso especial deste tipo é quando $H = \mathcal{H}$, e as duas

geodésicas terminam no ∞ , sendo assim linhas verticais em \mathbb{R}^2 . Neste caso a composição de duas reflexões é uma translação do tipo $z \rightarrow z + a$, $a \in \mathbb{R}$. Por causa da conjugação de todas as isometrias parabólicas com um caso destes, esta descrição é geral.

2.3 Os números complexos e as isometrias euclidianas.

As linhas geodésicas do semi-plano de Poincaré são semicírculos euclidianos, e os círculos hiperbólicos são também círculos euclidianos, e as isometrias euclidianas são inversões euclidianas. Mas a ligação mais surpreendente, trazida ao de cima pela métrica de Poincaré, é o papel desempenhado pelos números complexos nesta e noutras geometrias. Esta ligação é tão profunda que os matemáticos pensam nos pontos do plano hiperbólico como números complexos com a parte imaginária positiva em vez de pares (x, y) com um y positivo. Isto permite-lhes aplicar a teoria dos números complexos à geometria hiperbólica, como reciprocamente podem aplicar ferramentas da geometria não euclidiana para resolverem problemas de análise complexa.

Com esta ligação complexos-geometria hiperbólica, os movimentos rígidos no plano euclidiano e no plano hiperbólico possuem fórmulas bastante elegantes se forem traduzidas pelos números complexos.

Destaquemos o facto de que todo o ponto (x, y) do plano cartesiano está associado a um número complexo $z = x + iy$ onde $i^2 = -1$, e que o conjunto dos números complexos tem uma estrutura de corpo, isomorfo a \mathbb{R}^2 .

Na adição de dois números complexos z e c , observando o aspecto geométrico, podemos verificar que o segmento que une o complexo z a $z + c$ é paralelo ao segmento que une a origem ao complexo c e de igual comprimento. Ou seja houve uma translação no plano euclidiano de um segmento de recta.

Lema 2.3.1 *Se c é um ponto fixo complexo qualquer, então a função $f(z) = z + c$ é uma translação do plano euclidiano. Reciprocamente cada translação do plano é expressa desta forma.*

Agora vamos tentar traduzir a rotação euclidiana também por uma função complexa.

Se observarmos o ponto $z(x, y)$ como sendo o ponto do plano euclidiano associado ao complexo $z = x + iy$, e transformando este último na sua forma trigonométrica, $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, com θ a designar o argumento do complexo z , e na notação mais usada - notação de Euler, $z = |z|e^{i\theta}$, não é difícil deduzir que $z_1 z_2 \dots z_n = |z_1| |z_2| \dots |z_n| e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)}$, e, que assim a multiplicação de números complexos tem uma interpretação geométrica dada em termos do módulo do complexo z_k e respectivo argumento. A divisão complexa também tem um significado geométrico interessante já que esta está também baseada no módulo dos complexos e respectivos argumentos. É muito comum designarmos por *princípio do argumento* ao facto de que na multiplicação somarmos os argumentos e na divisão subtraímos os argumentos para obter o argumento do complexo que resulta de cada operação respectiva.

Assim, se α é um ângulo fixo e $z = re^{i\theta}$ é um complexo arbitrário de módulo r , então o complexo $w = e^{i\alpha}z$ é obtido a partir de z por uma simples rotação de ângulo α , em sentido anti-horário, com centro na origem. Reciprocamente, cada rotação pode ser expressa nessa forma.

Lema 2.3.2 *Para qualquer ângulo α e qualquer complexo c a função $f(z) = e^{i\alpha}(z - c) + c$ é a rotação de centro c e ângulo α , $R_{c,\alpha}$.*

Demonstração: A função $f(z)$ é a composição da translação $z - c$, a rotação $e^{i\alpha}z$ e a translação $z + c$. Assim a função é uma rotação de ângulo α , já que

$$f(c) = e^{i\alpha}(c - c) + c = c,$$

e daqui segue-se que $f(z) = R_{c,\alpha}$. ■

Por exemplo, a rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos, no sentido anti-horário, com centro no ponto $(0, 1)$ tem a expressão

$$R_{i,\pi/2} = e^{i\pi/2}(z - i) = iz + 1 + i.$$

De forma semelhante, a rotação de π radianos, no sentido anti-horário, com centro no

ponto $(2, 1)$ tem a expressão

$$R_{2+i,\pi} = e^{i\pi}(z - 2 - i) + 2 + i = -z + 4 + 2i.$$

Uma das vantagens de obter uma fórmula explícita para a rotação, em termos de números complexos, é que, por exemplo, a composição de rotações é agora obtida de uma forma bastante simples. Ou seja, a composição $R_{2+i,\pi} \circ R_{i,\pi/2}$ é calculada através da composição de funções complexas, ficando

$$f(z) = -(iz + 1 + i) + 4 + 2i = -iz + 3 + i = e^{3i\pi/2}z + 3 + i = R_{2-i,3\pi/2},$$

pois pelo lema anterior

$$-ic + 3 + i = c \Leftrightarrow c = 2 - i.$$

Finalmente, vamos traduzir, também, as reflexões euclidianas numa função complexa.

Notemos, inicialmente, que $f(z) = \bar{z}$ dá-nos a reflexão ρ_x de todos os pontos do plano euclidiano pelo eixo real. Se m é uma recta que passe pela origem de declive θ então $R_{O,\theta} \circ \rho_x \circ R_{O,-\theta}$ é a reflexão ρ_m pela linha m . Em termos de números complexos esta composição pode ser escrita da seguinte forma

$$e^{i\theta} \overline{e^{-i\theta} z} = e^{2i\theta} \bar{z}.$$

Esta última expressão dá-nos a reflexão por qualquer linha recta que passe pela origem. Generalizando a todas as rectas obtemos o seguinte lema.

Lema 2.3.3 *Se m é uma linha qualquer com declive α e c é um ponto em m , então a função $f(z) = e^{2i\alpha} \overline{z - c} + c$ é a reflexão pela linha recta m .*

Demonstração: Seja n uma linha recta que passe pela origem paralela a m , e seja τ a translação $z + c$ que transforma 0 em c . A reflexão $\tau \circ \rho_n \circ \tau^{-1}$ fixa todos os pontos de m e assim tem de ser ρ_m . Assim, $\tau \circ \rho_n \circ \tau^{-1}(z) = e^{2i\alpha} \overline{z - c} + c$ e temos a função desejada.

■

Em particular, note-se que a reflexão pela linha geodésica que passa por $(r, 0)$ é dada pela expressão $-\bar{z} + 2r$.

Seja ρ a reflexão pela linha recta $y = x - 2$ e seja σ a reflexão pela linha recta $x = 5$. Estas reflexões têm as expressões

$$\rho(z) = e^{2i\pi/4}(\bar{z} - 2) + 2 = i\bar{z} + 2 - 2i$$

$$\sigma(z) = -\bar{z} + 10.$$

A composição $\rho \circ \sigma$ é a transformação

$$i(-\bar{z} + 10) + 2 - 2i = -iz + 2 + 8i = e^{3i\pi/2}z + 2 + 8i,$$

que é uma rotação de 90° , no sentido horário, cujo centro é a solução da equação $-iz + 2 + 8i = z$, i.e., o ponto $5 + 3i$.

Os três lemas anteriores podem ser sumariados no seguinte teorema.

Teorema 2.3.1 *As isometrias do plano euclidiano têm todas a forma*

$$f(z) = e^{i\alpha}z + c \quad \text{ou} \quad f(z) = e^{i\alpha}\bar{z} + c,$$

onde α é um número real arbitrário e c é um número complexo arbitrário. Reciprocamente, cada função que se apresente em qualquer destas duas formas é uma isometria no plano euclidiano.

Demonstração: Já sabemos que as translações, rotações e reflexões do plano euclidiano têm todas esta forma. Como a composição de funções neste formato gera outra função neste formato, o mesmo acontece para as transformações refletidas.

Reciprocamente, sabemos que toda a função da forma $e^{i\alpha}z + c$ é ou uma rotação ou uma translação, e toda a função na forma $z + c$ é uma translação, e cada função da forma $e^{i\alpha}\bar{z}$ é uma reflexão. Assim cada função da forma $e^{i\alpha}\bar{z} + c$ é a composição de uma translação com uma reflexão e assim é uma translação refletida. ■

Como exemplo podemos verificar se $f(z) = i\bar{z} + 1 - i$ e $g(z) = i\bar{z} - 2$ são uma reflexão ou uma translação refletida. Demonstramos que $f(z)$ é uma reflexão, encontrando os seus pontos fixos, i.e., mostrando que existem soluções para a equação $f(z) = z$. Para encontrar estas soluções fazemos $z = x + iy$, e substituímos na equação e obtemos

$$i(x - iy) + 1 - i = x + iy.$$

Pela igualdade de dois complexos obtemos $x = y + 1$, e $x - 1 = y$. Como estas duas últimas equações são idênticas segue-se que $f(z)$ é uma reflexão pela linha recta $y = x - 1$.

Quanto à função $g(z)$, podemos ver que já que $g(0) = -2$, o eixo deste movimento rígido contém o ponto $\frac{0+(-2)}{2} = -1$. Além do mais, $f(-1) = -2$, e assim $f(z) = \gamma_{-1,-2-i}$, uma translação refletida, ou seja $\tau_{-1,-2-i} \circ \rho_{-1,-2-i}$.

2.4 Os números complexos e as isometrias hiperbólicas

Agora vamos introduzir a descrição algébrica das isometrias no plano hiperbólico. Destes, as translações horizontais e as reflexões nas geodésicas rectas são também isometrias euclidianas, e como tal podem ser expressas como $f(z) = z + r$ ou $f(z) = -\bar{z} + r$, respectivamente, onde r é um número real arbitrário.

Note-se que a função $f(z) = z + 1$ não é exactamente o mesmo que a isometria hiperbólica que consiste em mover cada ponto para a direita uma unidade. Estas duas transformações diferem nos seus domínios - uma tem o plano como domínio enquanto a outra está apenas definida na metade superior do plano.

Consideremos a inversão $I_{O,k}$. Note-se que se $z' = I_{O,k}(z)$ então $\arg(z') = \arg(z)$ e $|z||z'| = k^2$. Consequentemente

$$z' = I_{O,k}(z) = \frac{k^2}{\bar{z}},$$

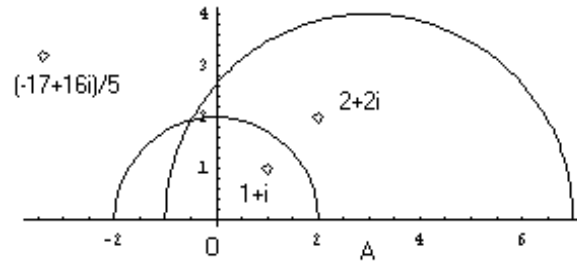


Figura 2-4: Rotação hiperbólica

já que o número k^2/\bar{z} também satisfaz as condições

$$\arg\left(\frac{k^2}{\bar{z}}\right) = \arg(z) e \left| \frac{k^2}{\bar{z}} \right| |z| = k^2.$$

Se $A(a, 0)$ é um ponto arbitrário do eixo real, então

$$I_{A,k}(z) = \tau_{OA} \circ I_{O,k} \circ \tau_{AO}(z) = \frac{k^2}{\bar{z} - a} + a.$$

Isto dá-nos uma descrição analítica de todas as inversões que são também isometrias hiperbólicas.

Temos, por exemplo, que

$$I_{O,2}(z) = \frac{4}{\bar{z}},$$

uma inversão que transforma o ponto $1+i$ em $2+2i$. Por outro lado, se $A = (3, 0)$, então a inversão $I_{A,4}$ tem a expressão analítica

$$\frac{4^2}{\bar{z} - 3} + 3 = \frac{3\bar{z} + 7}{\bar{z} - 3},$$

e assim transforma o ponto $1+i$ no ponto $-17/5 + i16/5$.

As inversões $I_{O,2}$ e $I_{A,4}$ são reflexões hiperbólicas, e o seus eixos intersectam-se.

Como a composição de duas reflexões é uma rotação então $R = I_{A,4} \circ I_{O,2}$ é uma rotação hiperbólica. Vamos examinar esta composição em maior detalhe. Tomando em

conta que o conjugado de $4/\bar{z}$ é $4/z$ calculemos

$$R(z) = I_{A,4} \circ I_{O,2}(z) = I_{A,4} \left(\frac{4}{\bar{z}} \right) = \frac{3\frac{4}{z} + 7}{\frac{4}{z} - 3} = \frac{7z + 12}{-3z + 4}.$$

Já que $R(z)$ é uma rotação hiperbólica, tem de ter um ponto único fixo no semi-plano superior, o centro da rotação. Ora, fazendo $R(z) = z \Leftrightarrow z^2 + z + 4 = 0$, em que as soluções desta equação são $z_0 = \frac{-1+i\sqrt{15}}{2}$ ou $z_1 = \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$, em que apenas z_0 está no semi-plano superior. Assim a rotação $R = I_{A,4} \circ I_{O,2}$ é uma rotação hiperbólica com centro em z_0 . Designemos o centro por C .

Hiperbolicamente o ângulo entre os eixos $I_{A,4}$ e $I_{O,2}$ é dado por

$$\cos^{-1} \left(\frac{\overline{AC}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{OA}^2}{2\overline{AC} \cdot \overline{OC}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{16 + 4 - 9}{16} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{11}{16} \right)$$

e assim o ângulo da rotação é dado por $2 \cos^{-1} \left(\frac{11}{16} \right) = 93,13\dots^\circ$.

Consideremos, agora, a composição $T = I_{B,4} \circ I_{O,2}$, onde $B = (-1, 0)$. Já que os eixos destas reflexões não se intersectam, esta composição, cuja expressão analítica é dada por

$$T(z) = I_{B,4} \circ I_{O,2}(z) = \frac{4^2}{\frac{2^2}{z} + 1} - 1 = \frac{15z - 4}{z + 4},$$

é a correspondente hiperbólica da translação euclidiana.

Tanto $T^n(1+i)$ como $T^n(3i)$ são funções que convergem para o mesmo ponto no eixo real. Hiperbolicamente falando, ambas estas sequências divergem para o infinito hiperbólico.

Os exemplos anteriores mostram claramente a utilidade dos números complexos quando queremos obter uma efectiva e concreta descrição das reflexões e rotações hiperbólicas.

Como cada isometria hiperbólica é a composição de várias reflexões hiperbólicas, é razoável esperar que todas as isometrias hiperbólicas tenham expressões similares. Estas expressões são extremamente simples.

Teorema 2.4.1 *As isometrias no plano hiperbólico coincidem com as funções complexas*

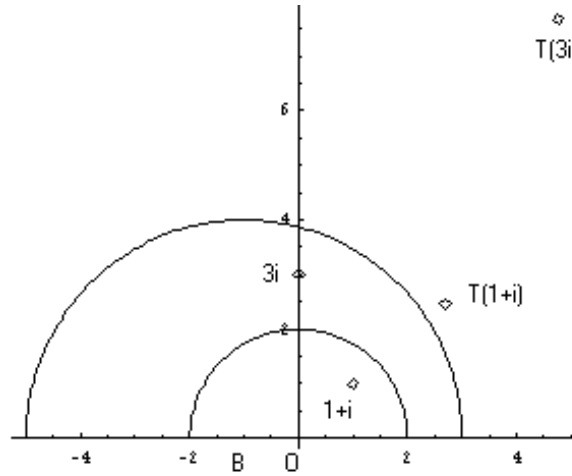


Figura 2-5: Translação hiperbólica

que têm as seguintes formas:

$$i) f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{ou} \quad ii) f(z) = \frac{\alpha(-\bar{z}) + \beta}{\gamma(-\bar{z}) + \delta}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são números reais e $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$.

Demonstração: É claro que as translações horizontais têm a forma

$$\frac{1z + r}{0z + 1},$$

e que as reflexões em geodésicas rectas têm a forma

$$\frac{1(-\bar{z}) + r}{0(-\bar{z}) + 1},$$

e que as reflexões nas geodésicas em forma de arco têm a forma

$$\frac{k^2}{\bar{z} - a} + a = \frac{a\bar{z} + k^2 - a^2}{\bar{z} - a} = \frac{-a(-\bar{z}) + (k^2 - a^2)}{-(-\bar{z}) - a},$$

e em todos os casos $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$.

Além do mais, se f e g são duas funções neste formato, assim o é a sua composição.

Por exemplo, se

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{\alpha'(-\bar{z}) + \beta'}{\gamma'(-\bar{z}) + \delta'}$$

então

$$f \circ g(z) = \frac{(\alpha\alpha' + \beta\gamma')(-\bar{z}) + (\alpha\beta' + \beta\delta')}{(\gamma\alpha' + \delta\gamma')(-\bar{z}) + (\gamma\beta' + \delta\delta')}$$

onde $(\alpha\alpha' + \beta\gamma')(\gamma\beta' + \delta\delta') - (\alpha\beta' + \beta\delta')(\gamma\alpha' + \delta\gamma') = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') > 0$.

Os restantes casos ficam como exercício.

Como sabemos que cada isometria hiperbólica é a composição de algumas reflexões hiperbólicas, segue-se que todas elas, de facto, têm o formato *i*) ou *ii*).

Reciprocamente, supomos agora que $f(z)$ é do formato *i*). Então, tendo em mente que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são números reais, verifica-se que

$$f(z) = - \left[\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)/\gamma^2}{\bar{z} - (-\delta/\gamma)} + \left(-\frac{\delta}{\gamma} \right) \right] + \frac{\alpha - \delta}{\gamma}.$$

Assim, $f(z)$ é a composição da inversão $I_{(-\delta/\gamma, 0), \sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}/\gamma}$ com a reflexão na geodésica recta acima do ponto $\left(\frac{\alpha - \delta}{2\gamma}, 0 \right)$ sendo as duas isometrias hiperbólicas.

Se, por outro lado, $f(z)$ é do tipo *ii*, então

$$f(z) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)/\gamma^2}{\bar{z} - \delta/\gamma} + \frac{\delta}{\gamma} + \frac{\alpha - \delta}{\gamma}.$$

Já que $\alpha\delta - \beta\gamma$ é positivo, segue-se que de facto $f(z)$ é a composição de uma inversão numa geodésica em forma de arco com uma translação horizontal, ambas sendo isometrias hiperbólicas. Assim $f(z)$ é uma isometria hiperbólica.

Além do mais, como cada translação horizontal é a composição de duas reflexões em geodésicas rectas, segue-se que toda a transformação do tipo *ii* é a composição de três reflexões hiperbólicas, a não ser que, $\alpha = \delta$, em que cada caso a transformação é ela mesmo uma inversão. ■

A demonstração do teorema anterior contém uma receita para podermos expressar qualquer isometria hiperbólica à custa de composições de reflexões hiperbólicas. Assim, a isometria hiperbólica dada por

$$\frac{2z + 3}{z + 4}$$

é a composição cujas componentes são a inversão

$$\frac{(8-3)/1}{\bar{z} - (-4)} + (-4) = I_{(-4,0),\sqrt{5}}$$

seguida da reflexão $-\bar{z} - 2$ cujo eixo é a geodésica vertical acima de $(-1, 0)$.

2.5 Exercícios

1. Seja L uma circunferência euclidiana ou uma linha recta ortogonal ao eixo real que encontra o eixo em algum ponto finito α . Prove que a transformação

$$T(z) = -(z - \alpha)^{-1} + \beta$$

pertence a $PSL(2, \mathbb{R})$, e para um certo β transforma L no eixo imaginário.

2. Prove que para $z, w \in \mathcal{H}$ e $T \in PSL(2, \mathbb{R})$,

$$|Tz - Tw| = |z - w| |T'(z)T'(w)|^{1/2}.$$

3. Prove que para $z \in \mathcal{H}$, e $f(z) = \frac{zi+1}{z+1}$,

$$\frac{2|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{\text{Im}(z)}.$$

4. Prove que no modelo \mathcal{U} , se $0 < r < 1$ então

$$\rho(0, ir) = \int_0^r \frac{2dt}{1-t^2} = \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

5. Prove que as geodésicas em \mathcal{U} são segmentos de circunferências euclidianas ortogo-

nais à circunferência principal Σ e aos seus diâmetros.

6. Prova que para $z, w \in \mathcal{U}$, temos:

6.1.

$$\rho(z, w) = \ln \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}$$

6.2.

$$\sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$$

7. Prove que as isometrias são contínuas.

8. Mostre que cada circunferência hiperbólica em \mathcal{H} é uma circunferência euclidiana, e vice-versa.