INTRODUÇÃO DE MÓDULOS CIENTÍFICOS AVANÇADOS NA MATEMÁTICA

João Cabral [1]

[1] Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, Portugal, jcabral@uac.pt

RESUMO

A introdução de módulos científicos avançados para suportar a didáctica tem uma importância fundamental no ensino da Matemática. Mas esta necessidade esbarra com a falta de tempo que os professores têm para desenvolver estratégias novas e implementa-las, já que ficam presos a uma máquina burocrática que consome tempo precioso, que poderia ser investido no ensino.

Os conceitos didácticos e os conteúdos científicos têm de trabalhar juntos, tipo roda dentada numa engrenagem do conhecimento, em que o conhecimento didáctico permite introduzir conceitos que depois serão explorados cientificamente, e os conceitos científicos por sua vez têm de possibilitar a expansão didáctica, que se reflectirá na criatividade do aluno. Esta dialéctica permite uma progressão no conhecimento que terá efeitos imediatos na motivação e na captação da atenção por parte de quem aprende.

1. Introdução

Cada aluno, que pela primeira vez toma contacto com o seu manual de apoio à disciplina de Matemática no ensino secundário, depara-se com conteúdos, que não fazendo parte do programa, surgem no final de cada capítulo que efectivamente será leccionado nas aulas. Muitas vezes são ignorados pelos mesmos, mas no geral o seu aspecto, e até o seu grafismo chama a atenção do aluno, que depois com a falta de tempo, e a sobrecarga lectiva, ignora completamente a sua mensagem. São conteúdos extra apresentados no espírito de tentar captar a curiosidade do aluno, de modo a que o leve a explorar os temas e ir mais além do que é ensinado pelo professor na sala de aula, mas também podem apenas conter aspectos históricos que são muito importantes na evolução do conhecimento de cada unidade lectiva. Todos estes conteúdos, e todos os outros que são introduzidos pelo professor, na tentativa de melhorar a sua actividade científica-pedagógica, que sejam extraídos de um conhecimento que vai para além do programa de cada disciplina, ou até mesmo de um ciclo de ensino, são aqui designados por módulos científicos avançados.

Os módulos científicos avançados têm uma importância fundamental no ensino da Matemática. Uma importância que se converte numa necessidade urgente, porque complementa, na maior parte das vezes, a necessidade que o aluno tem de perceber onde pode aplicar, concretamente na realidade, os conceitos e conteúdos que aprende na disciplina. Mas esta necessidade esbarra com a falta de tempo que os professores, têm para desenvolver estratégias novas e implementa-las, já que ficam presos a uma máquina burocrática que consome tempo precioso, que poderia ser investido no ensino.

Os conceitos didácticos e os conteúdos científicos têm de trabalhar juntos, tipo roda dentada numa engrenagem do conhecimento, em que o conhecimento didáctico permite introduzir conceitos que depois serão explorados cientificamente, e os conceitos científicos por sua vez têm de possibilitar a expansão didáctica, que se reflectirá no suporte e expansão da criatividade do aluno. Esta dialéctica permite um progresso no conhecimento que terá efeitos imediatos na motivação e na captação da atenção por parte de quem aprende.

Para além da componente científica já existente, se introduzirmos pequenos módulos científicos mais avançados na disciplina, que podem ser apresentados pelo próprio professor, ou por convidados em pequenas palestras, e se depois forem trabalhados na sala de aula, em grupo, ou em laboratórios de Matemática, obter-se-á como resultado um trabalho final do aluno auto-motivador. Neste trabalho final, o aluno reflecte a sua criatividade, a sua capacidade de aprender e inovar, de gerar o seu próprio conhecimento. Já é comprovadamente conhecido que "o aprender fazendo" tem sempre melhores resultados na génese do ensino. Grandes movimentos como o Escutismo já usam esta técnica com bastante eficácia desde o início do século XX.

Assim, neste artigo, apresento aqui algumas sugestões inovadoras de como esta introdução pode ser efectuada e explorada na disciplina da Matemática.

2. A calculadora

Quando a calculadora foi introduzida no ensino da matemática trouxe a inovação à disciplina, em termos tecnológicos, pois muito do grafismo e cálculo que era elaborado pelos alunos com as ferramentas até então mais usadas, como o lápis e o papel, recorrendo-se muito frequentemente ao cálculo mental, foi substituído pelo premir de um botão. Melhor dizendo, todo o processo de eventos que levava à execução de uma tarefa, em que havia a necessidade de pensar na forma como todas as suas componentes deveriam ser organizadas para se obter o resultado pretendido, foi substituído por uma colecção de eventos mecânicos, dominados pelo pressionar de teclas, com base numa estrutura assente num manual, da calculadora, que só por si só requer uma aprendizagem mecânica e estática. Pois o comando errado da calculadora conduzirá a resultados não pretendidos, e toda a articulação das várias componentes de um dado raciocínio ficam encapsuladas numa caixinha de plástico, que funciona de uma forma incompreensível, para a grande maioria dos alunos.

Este produto do avanço tecnológico, que a sociedade sofre de forma contínua, veio trazer muitas mudanças na sala de aula, e a mais importante foi o facto de que os professores tiveram que aprender a conviver com a mesma. Uma mudança nada pacífica, já que a falta de orientações neste sentido, na cadeia hierárquica, provocou reacções que levaram ao simplismo do uso da máquina, reduzindo-o a uma mera ferramenta de cálculo algébrico, tipo uma tabuada mais avançada. Mas, no entanto, com o passar do tempo, e com a habituação ao novo instrumento, esta veio sendo melhor entendida e o seu papel no seio da sala de aula melhor interpretado por parte dos agentes educativos.

Ao longo dos últimos anos, os alunos aprenderam a manusear de forma eficiente a nova ferramenta, e até conseguiram criar formas desta, através do recurso à programação, lhes auxiliar para além do pretendido pelo agente educativo e servir quase como auxiliar de memória. Com melhor ou pior implementação, hoje em dia já é bem aceite nas escolas e as tarefas, exigidas na sala de aula, são orientadas no sentido do seu uso, e a respectiva reformulação estrutural de conceitos, causada pela sua introdução no ensino, foi mais ou menos bem superada pelos alunos e professores.

Como toda a introdução de ferramentas novas no ensino da Matemática, podemos sempre assinalar vantagens e desvantagens. Nessa classificação vão existir sempre vozes contra e a favor. Os apoiantes das vantagens defendem uma economia de tempo que de outra forma não seria possível, possibilitando a exploração de mais conteúdos na disciplina, e a possibilidade de gerar actividades na sala de aula, que sem o uso da calculadora, mesmo com grande força de vontade do professor, nunca haveria tempo de as implementar. Os apoiantes das desvantagens suportam a sua causa no efeito regressivo que a calculadora trouxe ao cálculo, deixando o aluno de pensar na articulação sistemática do cálculo algébrico, ignorando propriedades e regras importantes na evolução científica de muitos conteúdos da disciplina, para apenas se limitarem a escrever algo num reduzido ecrã e a esperarem pela resposta oportuna da máquina. De facto, analisando todo o desenvolvimento actual e reestruturação da disciplina, podemos verificar que ambos os lados têm razão, e que encontrar o ponto de equilíbrio tem sido sempre uma tarefa árdua. Claramente, também podemos concluir que a calculadora é uma excelente auxiliar dos aspectos didácticos da disciplina, mas uma péssima ferramenta na área científica se o seu uso não for bem gerido. A própria calculadora representa, só por si, um autêntico conceito avançado que encontrou o seu espaço na disciplina, que antes era dominada pelo papel, pelo lápis, pela régua, pelo esquadro, e por tantos outros materiais que dependiam a sua existência da força de vontade do professor em os criar para serem usados na sala de aula. No fundo, se for usada de forma eficaz, representa um módulo científico avançado, equivalente aos que surgem no final de cada capítulo no manual escolar, que permitem a exploração, o desenvolver do saber, e o ir mais além, por parte do aluno.

3. Dinâmica do módulo científico avançado

Não é preciso alterar muitos parâmetros na dinâmica escolar para se introduzir um módulo avançado relativo ao ensino da disciplina de Matemática, mas este pode provocar processos contrários ao pretendido, caso a sua introdução não seja bem executada e controlada. A calculadora é um bom exemplo desse efeito.

A seguir propõe-se uma implementação, em três fases, que minimiza o efeito negativo da introdução do mesmo e maximiza o seu potencial como motor e facilitador da evolução do raciocínio do aluno. Esta implementação é vista apenas de um ponto de vista teórico, pois carece-lhe uma experimentação prática em terrenos próprios integrados na rede escolar, que ainda não foi efectuada.

Numa primeira fase de implementação, o módulo avançado é usado apenas como ferramenta, um auxiliar para permitir o ganho de tempo em unidades específicas da Matemática, especialmente se for construído tendo em vista a simplificação de regras de cálculo lógico ou dedutivo. A sua utilização caminha de forma paralela aos módulos tradicionais, sendo apenas incentivado o seu uso com a necessidade de progredir rapidamente para um resultado que é significativamente mais importante do que toda a mecânica algorítmica que o suporta. O módulo avançado pode ser visto aqui como a "cola" que une diversos segmentos de um raciocínio, de forma eficaz, de modo a ser construído o resultado, tendo o aluno possibilidade de tomar conhecimento das diversas componentes do mesmo, sem nunca se perder em cálculos demasiados elaborados e/ou cansativos que façam dispersar a sua atenção da componente didáctica realizada pelo professor.

Numa segunda fase de implementação, o módulo avançado vai substituindo gradualmente os módulos tradicionais, naquilo em que se torna realmente mais eficiente. Vão sendo introduzidos pelo professor alguns conceitos que permitam ao aluno a manipulação criativa do módulo, que podem ser apenas algumas regras base, possibilitando ao aluno a possibilidade de reestruturação e adaptação ao seu modo de pensar e agir sobre o conteúdo. No fundo, aqui são ditadas as regras base de um jogo, em que o aluno é o principal interveniente, e o professor necessita apenas de arbitrar o uso das mesmas. Deve-se deixar o aluno jogar, e sentir prazer em fazê-lo.

A terceira fase de implementação do módulo avançado já se recomenda que seja realizada nos laboratórios de Matemática, fora da sala de aula, em trabalhos de grupo ou individuais, tendo como objectivo final a total implementação dos conteúdos de suporte ao módulo, em termos científicos. Nesta fase o professor age como um agente dinâmico sobre a aprendizagem do aluno, introduzindo os conceitos em falta, e ajudando o aluno na sua caminhada, orientando-o de forma a haver um progresso significativo no seu entendimento do módulo científico avançado. O aluno deve ser sempre incentivado, e encorajado, a partilhar as suas descobertas e a descobrir formas de comunica-las aos seus colegas. Essa comunicação é onde o aluno deve usar toda a sua criatividade. Por exemplo, a apresentação pública de um projecto à comunidade escolar, em exposições cíclicas integradas no projecto escolar, é uma boa hipótese, ou então a apresentação, mais resguardada, a outros grupos, de outros laboratórios de Matemática, de outras escolas.

Para exemplificar estas três fases, vamos considerar o conteúdo da disciplina de Matemática cujo objectivo principal é a aprendizagem pelo aluno de métodos de resolução de sistemas de equações lineares a três incógnitas, que está integrado no estudo da posição relativa de planos e rectas. Os métodos tradicionais aqui existentes são os da resolução por substituição e o método da adição ordenada de equações, que são leccionados nos 11º e 12º anos de escolaridade. O módulo científico avançado que se pretende introduzir faz parte do currículo da disciplina de Álgebra Linear do 1º ano de um curso universitário, que é a resolução de sistemas de equações, usando o método de eliminação de Gauss.

Consideremos, então o problema de resolver o seguinte sistema de equações lineares, cujas equações já estão na forma canónica: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$.

1ª Fase – Com base no conteúdo programático da disciplina, a resolução deste tipo de sistemas é efectuada, usando o método da adição ordenada, em que as equações do sistema são multiplicadas, membro a membro, por constantes não nulas, e adicionadas duas a duas de modo a que o coeficiente dos termos, de uma das variáveis, seja anulado com esta soma. Neste processo gera-se sempre um pouco de confusão na escrita por parte do aluno, frequentemente, ficando a meio caminho do processo por falhas na organização algorítmica. Nesta desorganização mental e de escrita passa muitas vezes ao lado do raciocínio do aluno a necessidade de usar o m.m.c. entre dois números, como auxiliar da simplificação do cálculo, bem como a adição polinomial.

Assim, introduzindo a novidade da organização dos coeficientes em formato matricial, de modo a que os mesmos fiquem organizados em coluna respectivamente associada a cada uma das variáveis, os da variável x, na 1ª coluna, os da variável y na 2ª coluna e os da variável z, na 3ª coluna, posicionando-se os termos independentes numa quarta coluna, ganha-se vantagem em termos de escrita e também de organização. A matriz resultante seria uma do tipo $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Agora inicia-se o processo da adição ordenada, usando apenas os coeficientes, multiplicando cada uma das linhas por uma constante não nula e adicionando-as duas a duas, substituindo uma das linhas pela nova criada com a adição. O processo deve ser orientado pelo professor de modo a que uma das linhas fique fixa, preferencialmente uma linha que tenha os três coeficientes simultaneamente não nulos, e depois a adição deve ser dirigida de modo a anular por coluna os coeficientes de uma determinada variável nas outras linhas. Por exemplo, escolhendo a 2ª linha como fixa, podemos eliminar os coeficientes em y, adicionando a 1ª linha com a 2ª, e a 3ª com a 2ª.

O resultado seria a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Agora executa-se a adição ordenada apenas com as duas linhas novas criadas, fixando uma delas e eliminado um dos outros coeficientes afectos às variáveis x ou z. Aqui neste exemplo, podemos verificar que o coeficiente em z já foi anulado na 3ª linha. O objectivo será construir pelo menos uma linha em que surjam dois coeficientes nulos afectos às variáveis x, y e z. Logo após deverá ser reconstruído o sistema no seu formato usual e resolvido o sistema por substituição simples.

2ª Fase – O professor descrimina as regras básicas de manipulação do método de eliminação de Gauss, ver Giraldes [6], identificando a diagonal da matriz, mencionando as propriedades de troca de linhas e colunas, de modo a que na diagonal surja, sempre que possível, elementos não nulos. A adição ordenada já deve seguir o formato usual do método de eliminação de Gauss, que reside em fixar a 1ª linha, eliminar os coeficientes em x, excepto o da

1ª linha, depois fixando a 2ª linha, eliminar o coeficiente em y da 3ª linha. Passando, no final, ao formato original do sistema, então o sistema é resolvido por substituição.

Nesta fase é importante que o método seja treinado com sistemas possíveis e determinados, e só depois comece a ser explorada a resolução de sistemas impossíveis e sistemas possíveis e indeterminados. Esta classificação deve fazer parte das regras impostas no jogo, de modo a que o aluno veja que a mesma é um subproduto das próprias regras.

3ª Fase – Em laboratório já pode ser trabalhada a noção de matriz, podendo cada elemento ser representado pela notação usual $[a_{ij}]$, bem como uma escrita mais técnica que se aproxime tanto quanto possível do que é usual no método de eliminação de Gauss, desde a matriz inicial até à matriz final. Incentiva-se o pleno uso do mmc entre os números, bem como a escrita das operações efectuadas do tipo $L_i=L_i+K*L_j$, para significar que a linha i foi substituída pela linha i adicionada de um múltiplo k da linha j.

A exemplificação destas três fases, obviamente não está elaborada de forma exaustiva aqui neste artigo, pois o seu desenvolvimento integral, em todas as suas variantes no exercício proposto, iria implicar um excessivo número de páginas em relação ao limite fixado para o mesmo, mas o autor espera que tenha ficado claro a distinção entre as três fases de implementação para o leitor, num nível em que, depois em futuros desenvolvimentos, todo o processo fique mais perceptível.

4. Conclusões

O autor tem plena consciência de que a introdução de módulos científicos avançados, mesmo com uma sugestão estratégica da introdução dos mesmos, é sempre um assunto sensível, que pode sempre encontrar alguma resistência por parte dos agentes educativos, mas se tomarmos como exemplo a introdução da calculadora no ensino, essa resistência irá se dissipando ao longo do tempo, à medida que os módulos vão trazendo para a disciplina novas ferramentas e novas formas de pensar e agir sobre os conteúdos leccionados no ensino secundário.

Outros conceitos podem ser introduzidos, para além do método de eliminação de Gauss, por exemplo, o uso da noção de determinante na resolução de sistemas também pode ser um aliado poderoso no cálculo, se falarmos da resolução pela Regra de Cramer, ver Giraldes [2]. A noção de determinante também é útil na disciplina de Física, pois permite obter de forma rápida e eficiente o resultado de um produto entre vectores, tanto o escalar como o vectorial.

Outro conceito avançado que pode ser introduzido no ensino secundário é a noção de integral, apenas como ferramenta de cálculo, pois permite um exercício mental bastante elevado e possibilita a complementaridade do cálculo diferencial já existente. O seu nível de dificuldade na aprendizagem é tão elevado quanto a dificuldade em aprender as regras básicas do cálculo diferencial. Saber calcular áreas de figuras planas que resultem de regiões limitadas por curvas definidas por funções contínuas num dado intervalo, já introduzidas no programa, motivará os alunos a quererem explorar mais do assunto e a verificar na prática uma aplicação daquilo que aprendem.

A Álgebra pura, que já chegou a estar integrada no sistema de ensino, é algo que tem de voltar necessariamente a ser leccionado, e poderia ser integrada também como módulo científico avançado, pois possibilita uma compreensão mais ampla de conceitos que serão introduzidos mais tarde em áreas como a Informática e a Engenharia, sendo um suporte vital para a construção algorítmica em áreas como a Programação.

Assim, o autor ambiciona passar agora da teoria à prática e levar esta técnica da introdução de módulos científicos avançados para as escolas, recolhendo dados preciosos que vão permitir refinar as três fases de implementação, e extrair informação valiosa que permita identificar outras áreas em que possam ser também ser inseridas outras unidades avançadas, de uma forma tipo jogo. Esta miscigenação de conteúdos universitários e do secundário vai aproximar, sem dúvida, os dois tipos de ensino, adquirindo o aluno já algum conhecimento básico, a base da espiral futura, que permita que esse fique mais motivado, para ser ele próprio o motor do seu desenvolvimento intelectual, como pretende os ideais de Bolonha.

5. Bibliografia

[1] Baden-Powell, R. (1980). Escutismo para Rapazes, Edição do Corpo Nacional de Escutas, 6ª edição.

[2] Boll, M. (1979). As etapas da Matemática, Publicações Europa-América.

[3] Cury, A. (2007). Pais Brilhantes, Professores Fascinantes – Como formar jovens felizes e inteligentes, Editora Pergaminho.

[4] Ferreira Neves, M. A., e outros (2009). Manual do 11ºano – Geometria II, Porto Editora.

[5] Franco de Oliveira, A. (1996). Lógica e aritmética, Editora Gradiva.

[6] Giraldes, E. e outros (1997). Álgebra Linear e Geometria Analítica, Editora McGraw-Hill.

[7] Jesus Caraça, B. (1998). Conceitos Fundamentais da Matemática, Editora Gradiva.

[8] Parelman, Y. (1979). Matemáticas Recreativas, Editora Litexa-Portugal.

[9] Stewart, I. (1996). Os problemas da Matemática, Editora Gradiva.