

Capítulo 1

Introdução

1.1 Nota histórica

O campo da dinâmica complexa analítica tem sofrido um rápido desenvolvimento nos últimos 20 anos. Depois de um período de relativa dormência, o campo de estudo resurgiu em 1980 devido a algumas imagens, bastante intrigantes, obtidas com o auxílio de computadores do conjunto de Mandelbrot assim como a novos avanços na matemática preconizados por Douady, Hubbard, Sullivan e outros.

Assim, este campo experimentou dois períodos de evolução de curta duração, mas com um crescimento vigoroso e profícuo. As suas origens remontam aos finais do século XIX e início do século XX. Nesta altura, matemáticos como Leau, Schroder, Koenings, Bottcher, entre outros, interessaram-se pelo comportamento das funções complexas quando iteradas. O trabalho inicialmente focava-se no comportamento das mesmas junto aos pontos fixos.

Nos anos 1918-20 uma dramática mudança ocorreu quando, graças aos esforços de dois matemáticos franceses Julia e Fatou, se começou a estudar não apenas o comportamento local das funções mas também o comportamento global das mesmas, ao estudar a dinâmica das funções fora dos pontos fixos. Por vezes os resultados das iterações eram quase previsíveis e outras vezes o comportamento assumia-se como altamente instável, e que agora conhecemos como comportamento caótico. Em memória da contribuição dada por estes dois matemáticos franceses no estudo da dinâmica, designamos o conjunto estável no plano complexo de conjunto de Fatou, enquanto que a região caótica é conhecida por conjunto de Julia.

Numa série de trabalhos, nos anos vinte, Fatou e Julia, descreveram de forma fascinante muitas das propriedades destes conjuntos para transformações racionais. No entanto, na tentativa de classificar toda a dinâmica do conjunto de Fatou eles chegaram a um impasse. Eles não consideraram a hipótese de existirem domínios errantes, os quais eles não podiam provar a sua existência ou não. Estes domínios são agora conhecidos por discos de Siegel. Com este entrave o trabalho na dinâmica complexa abrandou, e não houve mais algum trabalho que se destacasse na área durante os quinze anos seguintes.

Em 1940, Siegel mostrou que os discos de Siegel existem de facto na dinâmica complexa. Esta descoberta veio contribuir para uma melhor classificação das regiões estáveis. Mais

tarde, Baker estendeu o trabalho de Julia e Fatou a outras classes de funções, mostrando durante a sua investigação que outros tipos de comportamento estável podem ocorrer para funções inteiras e funções holomórficas.

O segundo maior período de actividade da dinâmica complexa começou em 1980 quando Mandelbrot usou gráficos obtidos por computador para estudar a dinâmica complexa. A sua descoberta do conjunto de Mandelbrot catapultou a área e promoveu o interesse de outros matemáticos em retomar os estudos neste campo. Numa rápida sucessão de eventos, verificou-se a introdução de transformações quase-conformes, o que permitiu a Sullivan provar o teorema dos domínios não errantes, que veio completar a classificação de dinâmicas estáveis, classificação essa que foi iniciada por Fatou e Julia. Com o aparecimento do espaço dos parâmetros para polinómios quadráticos, introduzido por Douady, surge o desenvolvimento de técnicas que permitiram a classificação de quase todas as dinâmicas quadráticas, ficando por resolver a questão da conectividade do conjunto de Mandelbrot.

Logo após estes trabalhos estendeu-se o estudo a outros tipos de sistemas dinâmicos complexos, incluindo transformações racionais e polinómios de grau superior, que surgem do método de Newton, e a funções inteiras e holomórficas.

1.2 A esfera de Riemann

Ao analisarmos a função $Q(z) = z^2$, com $|z| < 1$, podemos verificar que a iteração desta função leva a que $Q^n(z) \rightarrow 0$, e que $Q^n(z) \rightarrow \infty$ caso $|z| > 1$. Assim, neste caso, o zero e o infinito podem ser vistos como dois pontos fixos atractores, mas temos de juntar $Q(\infty) = \infty$ para que de facto o infinito seja considerado de ponto fixo. A questão é que o ponto infinito não pertence a \mathbb{C} . Consideremos $H(z) = \frac{1}{z}$. A transformação H transforma o zero no infinito e vice versa, e ainda $H \circ Q \circ H^{-1} = Q$. Pela conjugação anterior podemos verificar que o comportamento de Q junto ao zero será o mesmo do que junto ao infinito. Ou seja, podemos considerar o infinito como sendo mais um ponto do plano complexo, e assim considerar o plano complexo estendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Se identificarmos cada ponto do plano com um único ponto de uma esfera definimos a esfera de Riemann.

Para obter uma métrica em \mathbb{C}_∞ identifiquemos \mathbb{C} com o plano horizontal $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ em \mathbb{R}^3 e constroi-se \mathbb{C}_∞ compactificando o plano com o ponto infinito.

Seja S a esfera no espaço tridimensional com raio unitário e centro na origem, e denotemos o ponto da esfera $(0, 0, 1)$ por ζ . Projectamos agora cada ponto z de \mathbb{C} de forma linear, em direcção a ζ e obtemos um ponto z^* na esfera S distinto de ζ . A transformação $\pi : z \rightarrow z^*$ é designada de projecção estereográfica de \mathbb{C} em S . Se $|z|$ for suficientemente grande, então verifica-se que z^* aproxima-se de ζ , e assim definimos $\pi(\infty) = \zeta$. Com esta definição π é uma transformação bijectiva de \mathbb{C}_∞ em S e vamos usar este facto para construir a métrica σ em \mathbb{C}_∞ à custa da métrica euclidiana em \mathbb{R}^3 .

Consideremos dois pontos z e w em \mathbb{C} , então

$$\sigma(z, w) = |\pi(z) - \pi(w)| = |z^* - w^*| = \frac{2|z - w|}{(1 + |z|^2)^{1/2} (1 + |w|^2)^{1/2}}.$$

Podemos concluir que enquanto z estiver em \mathbb{C} e se fizermos w a tender para o ponto ∞ podemos deduzir que

$$\sigma(z, \infty) = \lim_{w \rightarrow \infty} \sigma(z, w) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}.$$

Como $\sigma(z, w)$ é o comprimento euclidiano do arco que une z^* a w^* , σ é designada de métrica esférica em \mathbb{C}_∞ .

A métrica euclidiana em \mathbb{C} não é suficiente para lidar com o ponto infinito, mas a métrica esférica trabalha com todos os pontos em \mathbb{C}_∞ da mesma forma, e aí o ponto infinito é visto como um outro ponto qualquer perdendo qualquer significado especial.

Capítulo 2

Dinâmica das funções racionais

2.1 Transformações racionais

Uma transformação racional é uma função da forma $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, onde P e Q são polinómios não simultaneamente nulos. Se P é o polinómio nulo, então R é a função constante $R(z) = 0$. Se Q é o polinómio nulo, então R é a função constante $R(z) = \infty$. Se $Q(z) = 0$ e P não é o polinómio nulo, então $R(z)$ é definida como sendo ∞ e definimos $R(\infty)$ como o limite de $R(z)$ quando $z \rightarrow \infty$.

Suponhamos agora que P e Q são polinómios não nulos. Diz-se que o quociente $R(z)$ está reduzido se P e Q não têm factores comuns, e trabalha-se com $R(z)$ depois de simplificar os factores comuns aos dois polinómios. O grau de R pode ser definido como o número máximo de pré-imagens de um dado ponto z , ou então como o valor máximo dos graus de P e Q , ou seja

$$\text{grau}(R) = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}.$$

Se R for uma transformação constante $R(z) = \alpha$, com $\alpha \neq 0, \infty$ teremos $\text{grau}(R) = 0$, valor esse que vamos adoptar por convenção para os casos $R(z) = 0$ ou $R(z) = \infty$.

As transformações racionais são caracterizadas como transformações analíticas de \mathbb{C}_∞ em \mathbb{C}_∞ , sendo as únicas a possuir esta propriedade. No conjunto \mathbb{C}_∞ usaremos a métrica esférica, já que nos permite trabalhar com o ∞ como se de qualquer outro ponto se tratasse.

2.1.1 Órbitas

Consideremos uma função racional e um ponto inicial z_0 , de \mathbb{C}_∞ . Tomemos por convenção que $R^0 = I$, com I a representar a função identidade.

A órbita de z_0 é o conjunto das sucessivas imagens por composição sucessiva de R do ponto z_0 ,

$$z_0, z_1 = R(z_0), z_2 = R(z_1), \dots, z_n = R(z_{n-1})$$

ou seja,

$$z_0, z_1 = R(z_0), z_2 = R(R(z_0)), \dots, z_n = R^{n-1}(R(z_0))$$

$$z_0 = R^0(z_0), z_1 = R^1(z_0), z_2 = R^2(z_0), \dots, z_n = R^n(z_0).$$

Definição 2.1.1 A órbita futura de z_0 é o conjunto de pontos $O^+(z_0) = \{z_k = R^k(z_0), k = 0, 1, 2, \dots, n\}$. Se R for um homeomorfismo podemos definir a órbita total de z_0 como o conjunto de pontos $z_n = R^n(z_0)$ para $n \in \mathbb{Z}$, e a órbita passada de z_0 , $O^-(z_0) = \{z_k = R^k(z_0), k = 0, -1, -2, \dots, -n\}$.

Uma função do tipo $R(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, conhecida como *transformação de Möbius*, é um exemplo de uma transformação de grau 1, onde convencionamos $R(\infty) = \frac{a}{c}$ e $R(-\frac{d}{c}) = \infty$ com $c \neq 0$, enquanto que $R(\infty) = \infty$, com $c = 0$.

Estas transformações pertencem ao pequeno grupo de funções cuja iteração pode ser determinada explicitamente e onde podemos observar que, para a vasta maioria destas funções, z_n converge para um ponto independentemente do valor inicial. Podemos dar o exemplo da função $R(z) = \frac{3z-2}{2z-1}$ que por indução vemos que

$$R^n(z) = \frac{(2n+1)z - 2n}{2nz - (2n-1)}$$

em que $R^n(z) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$, para todo o z . Isto mostra que os pontos z_n eventualmente retornam a uma vizinhança de 1 e convergem para este ponto. Como nota podemos destacar que ao tomarmos um ponto da vizinhança de 1, de raio λ , com $\lambda > 0$ e muito pequeno, a iteração afasta-se de 1, pelo que o ponto 1 não pode ser visto como um ponto que atrai as órbitas de outros pontos.

2.1.2 Pontos fixos

Ao iterarmos diversos pontos em \mathbb{C} de uma função racional observamos que alguns pontos têm uma órbita sempre constante, estes pontos são designados de pontos fixos.

Definição 2.1.2 Um ponto ζ é designado de ponto fixo de R quando $R(\zeta) = \zeta$.

Os pontos fixos numa dada transformação racional são então obviamente as soluções da equação $R(z) - z = 0$, e pelo Teorema Fundamental da Álgebra, esta equação terá exactamente n soluções, não necessariamente distintas, com $n = \text{grau}[P(z) - zQ(z)]$. Caso $P(z) = zQ(z)$ então $n = 1$, como convencionamos acima, e o ponto fixo será o ∞ .

Considerando $R(z)$ a transformação de Möbius, n assumirá o valor 2. Assim esta transformação poderá ter um ponto fixo único, quando a solução é repetida, ou então dois pontos fixos, quando as soluções são distintas.

Vamos supor que R tem apenas um ponto fixo $\zeta = \infty$. Então $R(z) = z + \beta, \beta \neq 0$, e assim $R^n(z) = z + n\beta$, e teremos que, para todo o z , $R^n(z) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Consideremos agora que o ponto fixo único é $\zeta \neq \infty$. Fazendo $g(z) = \frac{1}{z-\zeta}$, note-se que $g(\zeta) = \infty$, e $S(z) = gRg^{-1}(z)$, com esta última transformação a fixar apenas o infinito e a representar uma translação dos valores z , daí que $S^n(z) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, sendo

$S^n(z) = gR^n g^{-1}(z)$. Efectuando uma substituição de z por $g(z)$, teremos

$$\begin{aligned} S^n(g(z)) &= gR^n g^{-1}(g(z)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow S^n g(z) = gR^n(z) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g^{-1}S^n g(z) = R^n(z) \end{aligned}$$

e daqui $R^n(z) \rightarrow g^{-1}(\infty) = \zeta$. Ou seja, para uma transformação de Möbius que tenha um único ponto fixo ζ teremos, para todo o z , $R^n(z) \rightarrow \zeta$.

Vamos supor agora que R tem dois pontos fixos diferentes, isto é, $\zeta_1 \neq \zeta_2$. Consideremos inicialmente que estes dois pontos fixos são o 0 e o ∞ . Então R assume a forma $R(z) = kz$ e $R^n(z) = k^n z$. Os pontos fixos de $R^n(z)$ são 0 e ∞ , enquanto que para os outros z teremos, $R^n(z) \rightarrow 0$ se $|k| < 1$; $R^n(z) \rightarrow \infty$ se $|k| > 1$, e, $|R^n(z)| = |z|$ se $|k| = 1$, com este último caso a ramificar-se em dois, pois se k for uma raiz enésima da unidade R^n é a identidade, se k não for uma raiz enésima da unidade, $R^n(z)$ são densos na circunferência com centro na origem e raio $|z|$.

Se os dois pontos fixos forem agora diferentes do zero e do infinito, construímos uma função $g(z) = \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}$ que transforma o ζ_1 no zero e ζ_2 no infinito. Seja $S = gRg^{-1}$, S fixa o zero e o infinito. Como o transformado de g são círculos, vemos que se R tem dois pontos fixos então, ou R^n converge para um destes pontos, ou move-se ciclicamente num conjunto finito de pontos, ou formam um subconjunto denso de alguma circunferência [Beardon].

Assim a dinâmica das transformações racionais de grau 1 é facilmente perceptível, e por isso o grosso do estudo das transformações racionais recai sobre as que têm grau superior ou igual a 2.

A localização dos pontos fixos de uma função torna-se num mero processo de cálculo, sendo assim, o trabalho ficará mais facilitado se soubermos de antemão quantos existem, logo é importante saber quantos pontos fixos terá uma transformação de grau d , com $d \geq 1$.

Consideremos f , uma transformação com k pontos fixos em ζ , e a igualdade seguinte

$$\begin{aligned} \frac{\varphi f \varphi^{-1}(z) - z}{[z - \varphi(\zeta)]^k} &= \left(\frac{\varphi f \varphi^{-1}(z) - \varphi \varphi^{-1}(z)}{f \varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z)} \right) \left(\frac{f \varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z)}{[\varphi^{-1}(z) - \zeta]^k} \right) \\ &\quad \left(\frac{[\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1} \varphi(\zeta)]^k}{[z - \varphi(\zeta)]^k} \right). \end{aligned}$$

Cada factor do membro da direita desta igualdade tende para um valor não nulo quando z tende para $\varphi(\zeta)$, pois, por exemplo, o primeiro factor é da forma

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{u - v},$$

e uma utilização da *Fórmula Integral de Cauchy* aplicada a um contorno fechado centrado em $\varphi(\zeta)$, mostra que este tende para um valor não nulo, nomeadamente $\varphi'(\zeta)$, quando ambos u e v tendem para ζ . No segundo factor, a própria definição de k implica que z tende para $\varphi(\zeta)$, e assim tende também para um valor não nulo. O terceiro factor por sua vez tende para $[\varphi'(\zeta)]^{-k}$. Este raciocínio prova o lema seguinte.

Lema 2.1.1 *Se ζ for um ponto fixo em \mathbb{C} de uma transformação analítica f , e φ uma transformação analítica, injectiva e finita em alguma vizinhança de ζ , então $\varphi f \varphi^{-1}$ tem o mesmo número de pontos fixos em $\varphi(\zeta)$ que f tem em ζ .*

Para estendermos este resultado a \mathbb{C}_∞ , basta conjugar a transformação em causa para que, por exemplo, o ponto fixo ∞ , quando surgir, se transfira para um ponto fixo ζ , e contar o número de pontos fixos da função conjugada. Pelo lema anterior vemos perfeitamente que a conjugação não afecta o número de pontos fixos. Assim podemos deduzir o seguinte resultado para as transformações racionais.

Teorema 2.1.1 *Seja ζ um ponto fixo de uma transformação racional R , e seja g uma transformação de Möbius. Então gRg^{-1} tem o mesmo número de pontos fixos em $g(\zeta)$ de que R tem em ζ .*

Depois de assegurar que a conjugação não altera o número de pontos de uma transformação racional podemos então deduzir o teorema seguinte.

Teorema 2.1.2 *Se $d \geq 1$, uma transformação racional de grau d tem precisamente $d + 1$ pontos fixos.*

Demonstração: Qualquer transformação racional R é conjugada com uma transformação racional S que não fixe o ∞ , e o número de pontos fixos de R e de S é o mesmo, assim como os seus graus.

Assuma-se que R não fixa o ∞ . Façamos $R = P/Q$, na forma reduzida, e seja ζ um ponto fixo qualquer de R , que tem de ser finito. Como $Q(\zeta) \neq 0$ o número de zeros de $R(z) - z$, em ζ , é exactamente o mesmo número de zeros de $P(z) - zQ(z)$, em ζ . Então o número de pontos fixos de R em \mathbb{C} é o número de soluções de $P(z) = zQ(z)$, em \mathbb{C} . Como R não fixa o infinito então temos

$$\text{grau}(P) \leq \text{grau}(Q) = \text{grau}(R).$$

e assim o grau de $P(z) - zQ(z)$ é exactamente $\text{grau}(R) + 1 = d + 1$. ■

A cada ponto fixo ζ de uma transformação racional R está associado um número complexo, a que designamos de *multiplicador* $m(R, \zeta)$ de R em ζ . Se $\zeta \in \mathbb{C}$ o multiplicador é $R'(\zeta)$. Este multiplicador é invariante sob conjugação, o que nos permite estabelecer

$$m(R, \infty) = m((gRg^{-1}, g(\infty))),$$

sendo g uma transformação de Möbius que transforma o infinito num valor de \mathbb{C} .

De acordo com a multiplicador $m(R, \zeta)$ podemos classificar os pontos fixos, classificação esta que se aplica a qualquer função analítica, em particular às transformações racionais e à sua inversa local, caso exista.

Definição 2.1.3 *Supondo que ζ é um ponto fixo de uma função analítica f temos que ζ é:*

- (a) *super-atractor* se $f'(\zeta) = 0$;
- (b) *atractor* se $0 < |f'(\zeta)| < 1$;
- (c) *repulsor* se $|f'(\zeta)| > 1$;
- (d) *racionalmente indiferente* se $f'(\zeta)$ é uma raiz da unidade;
- (e) *irracionalmente indiferente* se $|f'(\zeta)| = 1$, mas $f'(\zeta)$ não é uma raiz da unidade.

Por exemplo, $P(z) = z^2$ tem grau dois, e logo tem três pontos fixos em \mathbb{C}_∞ . Estes pontos fixos são o zero, a unidade e o infinito, pois $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ e $P(\infty) = \infty$. Os respectivos multiplicadores são $m(P, 0) = 0$, o que indica que este ponto é um super-atractor, $m(P, 1) = 2$, sendo a unidade um ponto repulsor e $m(P, \infty) = S'(\zeta)$ com $g(\infty) = \zeta$ e S conjugada com R por g .

Continuemos a considerar $P(z) = z^2$ e seja z_0 um ponto fora do círculo unitário, $|z_0| > 1$. Ao iterarmos z_0 por P verificamos que o módulo de z_0 vai aumentar exponencialmente, $|z_n| = |z_0|^{2^n} \rightarrow \infty$, enquanto que o argumento vai sempre duplicando. Assim a órbita de qualquer valor inicial, fora do círculo unitário, sujeita a uma iteração por P converge para o infinito.

Seja z_0 um ponto qualquer dentro do círculo unitário, $|z_0| < 1$. Ao iterarmos, agora, z_0 por P o módulo cresce da mesma forma do que no caso anterior, mas $|z_n| \rightarrow 0$ e assim as órbitas convergem para a origem.

2.1.3 Pontos periódicos

Do raciocínio anterior só faltou analisar os pontos que estão na circunferência unitária de centro na origem, ou seja, os pontos do tipo $z_0 = e^{2\pi i\alpha}$. A estrutura da órbita depende agora do valor α . Se $\alpha = 0$, teremos uma órbita do tipo $1, 1, \dots, 1$, ou seja, z_0 é fixo por P . Se $\alpha = \pi$, a órbita é do tipo $-1, 1, 1, \dots$, ou seja, toma dois valores distintos. Se $\alpha = \frac{p}{2^k}$, para quaisquer inteiros positivos k e p , a órbita consiste em $e^{i\pi p/2^{k-1}}, e^{i\pi p/2^{k-2}}, \dots, -1, 1, \dots$. Se $\alpha = \frac{p}{q}$, com q ímpar, a órbita assume-se como periódica. Ou seja, a partir de uma certa iteração, toma o valor inicial. Por exemplo, para $\alpha = 2/7$, teremos a órbita $e^{2\pi i/7}, e^{4\pi i/7}, e^{8\pi i/7}, e^{2\pi i/7}, \dots$, que volta ao valor inicial ao fim da 3ª iteração. O valor $e^{2\pi i/7}$ diz-se um ponto periódico de período 3 sob a iteração de P .

Definição 2.1.4 Um ponto z_0 diz-se periódico, de período n , sob R , se $R^n(z_0) = z_0$.

Se considerarmos $\alpha = 1/12$, neste caso q é par, teremos a órbita $e^{\pi i/6}, e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}, e^{2\pi i/3}, \dots$, e verificamos que na 4ª iteração obteve-se o valor da 2ª iteração. O valor $e^{\pi i/6}$ diz-se um ponto pré-periódico ou eventualmente periódico, de período 2, sob a iteração de P .

Definição 2.1.5 Um ponto z_0 é pré-periódico, ou eventualmente periódico, de período n , se z_0 não é periódico, mas existe um $n > 0$ tal que $R^{n+i}(z_0) = R^i(z_0)$, com $i > n$. Isto é, $R^i(z_0)$ é periódico para $i > n$.

Quando α é irracional, a órbita é infinita, e teremos sempre $z_n \neq z_m$, para qualquer $n \neq m$. É de considerar que $|z_n - z_m|$ aproxima-se de zero infinitas vezes.

Com este breve estudo verificamos que a transformação $z \rightarrow z^2$, permite aos valores, sob sua iteração, terem diferentes tipos de órbita: periódica, pré-periódica, infinita e convergindo para um ponto fixo, e, infinita e caótica. São estes tipos de órbita essencialmente que podemos encontrar nas transformações racionais.

Definição 2.1.6 *Um ponto periódico $z_0 = R^n(z_0)$ é designado de parabólico se $m(R, z_0) = 1$, mas R^n não é a transformação identidade.*

Por exemplo os dois pontos fixos da transformação $f(z) = \frac{z}{z-1}$ têm ambos multiplicador -1 mas não são parabólicos já que $R \circ R(z) = z$.

Um ponto periódico ζ de periodo n é classificado como um ponto fixo de R^n , mas mais pode ser dito acerca disso. Por conjugação, podemos assumir que a órbita não contém o ∞ e escrever

$$\zeta_m = R^m(\zeta), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

e assim $\zeta_{m+n} = \zeta_m$. Por n aplicações da *regra da cadeia*, obtemos

$$\begin{aligned} (R^n)'(\zeta_m) &= \prod_{k=0}^{n-1} R'(R^k(\zeta_m)) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} R'(\zeta_k), \end{aligned}$$

sendo o 2º produto um rearranjo do primeiro. Este facto mostra que a derivada $(R^n)'$ tem o mesmo valor em cada ponto ζ_j da órbita, e assim cada ponto ζ_j é classificado exactamente da mesma maneira do que outro ζ_k na órbita. Como consequência disso podemos estender a classificação dada aos pontos periódicos e falar no multiplicador da órbita, órbitas atractoras, repulsoras, etc.

2.1.4 Pontos críticos

No estudo da dinâmica da transformações racionais existem uns pontos que são muito importantes, pois estes influenciam em muito a dinâmica da transformação, são os pontos críticos de uma transformação.

Definição 2.1.7 *Os pontos críticos de uma transformação R são os pontos onde R não é homeomorfismo, sendo R um homeomorfismo local, à excepção destes pontos em número finito. Os pontos críticos no plano complexo são os zeros de $R'(z)$, e para ver se o ∞ é ponto crítico basta efectuar uma mudança de variável.*

Sendo z_0 um ponto crítico de R , esta transformação racional não é injectiva em qualquer vizinhança de z_0 , sendo o seu comportamento nesta vizinhança muito semelhante ao comportamento que tem numa vizinhança de zero a transformação $z \rightarrow z^2$.

Definição 2.1.8 *Um valor crítico é a imagem de um ponto crítico.*

Os valores críticos têm poucas pré-imagens e através do *Teorema de Riemann-Hurwitz* podemos assegurar que uma transformação racional de grau d tem exactamente $2d - 2$ valores críticos.

Teorema 2.1.3 (Relação de Riemann-Hurwitz): *Sendo $v_R(z)$ a valência de R em z , temos para qualquer transformação racional, não constante, R , que $\sum [v_R(z) - 1] = 2(\text{grau}(R) - 1)$.*

Demonstração: Vamos mostrar que a igualdade se verifica para qualquer conjugada de R , já que ambos os membros são invariantes sob conjugação.

Selecionemos um ponto ζ tal que $R(\zeta) \neq \zeta$, $v_R(\zeta) = 1$ e que $R(z) = \zeta$ tenha d distintas soluções, e construa-se uma transformação de Möbius g tal que $g(\zeta) = \infty$ e $g(R(\zeta)) = 1$. Se escrevermos agora $S = gRg^{-1}$ e transportando as propriedades de R para S , e renomeando S como sendo R , verificamos que podemos assumir que:

- (i) $R(\infty) = 1$;
- (ii) R tem pólos distintos $z_1, z_2, z_3, \dots, z_d$ (todos em \mathbb{C});
- (iii) $v_R(\infty) = 1$.

Estas condições implicam que a valência de R em ∞ , e em cada z_j , é um, então a soma $\sum [v_R(z) - 1]$, efectuada sobre todos os complexos z excepto para os pontos z_j , é o número de zeros de $R'(z)$.

Considerando $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, na forma reduzida, então

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2},$$

e esta derivada também está na forma reduzida, caso contrário o numerador e o denominador têm um zero em comum, que terá de ser algum z_j , e então $0 = P'(z)Q(z_j) = P(z_j)Q'(z_j)$, mas ou $P(z_j) = 0$ que é falso, pois P/Q está na forma reduzida, ou $Q'(z_j) = 0$, que também é falso já que z_j são os zeros simples de Q .

Assim a soma $\sum [v_R(z) - 1]$, além do número dos zeros de $R'(z)$ é também o grau de $P'Q - PQ'$, ou de forma equivalente o grau do polinómio $R'(z)Q(z)^2$, e vamos determinar o grau deste polinómio encontrando a sua ordem de crescimento para o ∞ . Primeiro, verifica-se que $Q(z)^2/z^{2d}$ tende para um limite finito não nulo quando $z \rightarrow \infty$. Depois, constatando que $v_R(\infty) = 1$, quer dizer que R é injectiva em alguma vizinhança de ∞ e $R(1/z) = 1 + Az + \dots$, junto à origem, onde $A \neq 0$. Diferenciando ambos os lados desta última igualdade, e substituindo z por $1/z$, verificamos que $z^2R'(z)$ tende para um limite finito não nulo em ∞ e assim

$$\sum [v_R(z) - 1] = 2d - 2.$$

Deste teorema sai o seguinte corolário, que relaciona o grau das transformações racionais com o número dos seus pontos críticos. ■

Corolário 2.1.1 *Uma transformação racional de grau positivo d tem no máximo $2d - 2$ pontos críticos em \mathbb{C}_∞ . Um polinómio de grau positivo d tem no máximo $d - 1$ pontos críticos.*

Convencionou-se o valor $v_R(z) - 1$ como sendo a multiplicidade do ponto crítico.

Através dos pontos críticos de uma transformação R podemos localizar o conjunto dos valores críticos de R^n da forma como nos mostra o seguinte teorema.

Teorema 2.1.4 *Seja C o conjunto dos pontos críticos de uma transformação racional R . Então o conjunto dos valores críticos de R^n é o conjunto*

$$R(C) \cup R^2(C) \cup \dots \cup R^n(C) = \cup_{k=1}^n R^k.$$

Demonstração: Seja z um elemento do conjunto $\cup_{k=1}^n R^k$, então existe uma sequência

$$z_0, z_1 = R(z_0), \dots, z = R(z_{n-1})$$

em que algum dos z_j está em C . Como as valências respeitam a regra da cadeia, ou seja,

$$v_{fg}(z_0) = v_f(g(z_0))v_g(z_0),$$

teremos que a valência de R^n em z_0 excede um. Então z é um valor crítico de R^n . No outro sentido, se z é um valor crítico de R^n , tem de existir alguma sequência em que a valência de R^n em z_0 exceda um, e assim z_j está em C . ■

2.1.5 Pontos excepcionais

Definição 2.1.9 *Um ponto z é designado de excepcional para R quando a classe de equivalência $[z]$ é finita, sendo $[z]$ o conjunto mais pequeno e invariante que contém z . O conjunto dos pontos excepcionais é denotado por E_R .*

A classe $[z]$ só é finita em raras circunstâncias, por este facto o nome aplicado a estes pontos z de excepcionais. Nas transformações racionais R é possível verificar quantos pontos destes iremos ter presentes.

Teorema 2.1.5 *Uma transformação racional R de, pelo menos, grau 2 tem, quando muito, dois pontos excepcionais. Se $E_R = \{\zeta\}$, então R é conjugada com um polinómio que faz corresponder ζ ao ∞ . Se $E_R = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, com $\zeta_1 \neq \zeta_2$, então R é conjugada com alguma transformação $z \rightarrow z^d$, onde ζ_1 e ζ_2 correspondem ao zero e ao infinito.*

Demonstração: A invariância de $E = E_R$ é fácil de ver pela sua definição e constituição.

Vamos supor que E é finito com k elementos. Como E é finito, e R transforma-o nele mesmo, a transformação actua como uma permutação de E , e assim para um inteiro adequado q , R^q é a transformação identidade de E nele mesmo. Agora supondo que R^q tem grau d segue-se que para todo o w em E , a equação $R^q(z) = w$ tem d soluções que estão todas em w , e assim, pela relação de Riemann-Hurwitz aplicada a R^q , temos

$$k(d-1) \leq 2d-2$$

Como $d \geq 2$ temos $k \leq 2$. Assim E tem, quando muito, dois elementos. Logo R tem, quando muito, dois pontos excepcionais.

Segue-se, através de uma adequada conjugação, que existem quatro possibilidades a considerar,

- (i) $E = \{\}$
- (ii) $E = \{\infty\} = [\infty]$
- (iii) $E = \{0, \infty\}, [0] = \{0\}, [\infty] = \{\infty\}$
- (iv) $E = \{0, \infty\}, [0] = [\infty]$

Se se verificar (ii) então R é um polinómio, tendo $R^{-1}\{\infty\} = \{\infty\}$. No caso de se verificar (iii), então R é também um polinómio, só que da forma $z \rightarrow az^d$ para algum inteiro positivo d . Finalmente se se verificar (iv) então $R(0) = \infty, R(\infty) = 0$, e R tem todos os seus zeros e pólos em $\{0, \infty\}$, e, então é da forma $z \rightarrow az^d$, para algum inteiro negativo d . ■

A prova anterior mostra, no sentido comum, que a maioria das transformações racionais não possuem pontos excepcionais.

Uma outra boa caracterização dos pontos excepcionais é dada pelo teorema seguinte, em que identificamos os pontos excepcionais pela sua órbita passada.

Teorema 2.1.6 *A órbita passada $O^-(z)$ de z é finita se e só se z é um ponto excepcional.*

Demonstração: Se z for excepcional a sua órbita é de facto finita, e assim basta provarmos que se $O^-(z)$ é finita então z é um ponto excepcional.

Primeiro definimos os conjunto não vazios

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} R^{-m}\{z\}$$

e assim $R^{-1}(B_n) = B_{n+1}$ e

$$[z] \supset O^-(z) = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$$

Agora assumimos que $O^-(z)$ é finita. Então cada B_n é finita, e então existe algum m com $B_m = B_{m+1}$; isto significa que $R^{-1}(B_m) = B_m$ e assim B_m é completamente invariante. Segue-se que B_m contém algumas classes de equivalência $[w]$, e como subconjunto de $[z]$, terá de ser $[z]$, então $[z]$ é finita e $[z] = O^-(z)$. ■

2.2 Estabilidade

2.2.1 Família normal

Vimos então que existem órbitas que se comportam de forma previsível e outras que se comportam de forma caótica e imprevisível. Tentemos clarificar melhor estes conceitos, introduzindo inicialmente o conceito de família normal de funções.

Definição 2.2.1 Uma família de funções analíticas complexas $\{f_\alpha\}$ definidas num domínio D é chamada de **família normal** se cada subconjunto infinito contém uma subsequência que converge uniformemente na métrica esférica, em qualquer subconjunto compacto de D .

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli isto é o mesmo que dizer que a família é equicontínua, na métrica esférica, em qualquer subconjunto compacto de D .

Montel na apresentação da sua tese (1907) explicitou o seguinte teorema, que é uma ferramenta básica na descrição de famílias normais de funções.

Teorema 2.2.1 A família F de funções analíticas em D limitadas por alguma constante é normal.

Demonstração: Tomemos o disco unitário $|z| < 1$. Se $f \in F$ satisfaz $|f| \leq M$ e se $|f| < r < 1$, usando as desigualdades de Cauchy temos que $|f'(z)| \leq \frac{M}{1-r}$. Considerando o domínio D coberto por discos temos então que a família é equicontínua, logo normal. ■

Um importante contributo para a caracterização das famílias normais é o teorema de Montel. Primeiro vejamos o seguinte teorema.

Teorema 2.2.2 Se $D = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ é a esfera de Riemann perfurada três vezes, então D^∞ é conformalmente equivalente ao disco unitário $\Delta = \{|z| < 1\}$.

Demonstração: Já que Δ é conformalmente equivalente à parte superior do plano $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, é suficiente encontrar uma transformação de cobertura de H em D . Vamos construir esta transformação, a função modular, da forma seguinte. Seja $E = \{z : 0 < \text{Re}(z) < 1, |z - 1/2| > 1/2\}$. Então existe uma transformação ψ que transforma E em H fixando os valores $0, 1, \infty$, pelo teorema de transformação de Riemann. Denotando por E^* a reflexão de E em $\{|z - 1/2| = 1/2\}$. Pelo princípio de reflexão de Schwarz, podemos estender ψ a uma transformação conforme de $E \cup E^*$ em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Continuando a reflexão podemos estender ψ a todos os $\{0 < \text{Re}(z) < 1, \text{Im}(z) > 0\}$ tomando os seus valores em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Refletindo através das linhas verticais $\{\text{Re}(z) = n\}$ para n inteiro, podemos estender ψ a todo o semiplano H . Pela construção vemos que a transformação estendida ψ é uma transformação de cobertura de H sobre D . ■

Teorema 2.2.3 (Montel) Seja F uma família de funções analíticas definidas num domínio D . Se a reunião $\cup_{f \in F} f(D)$ omite três pontos em \mathbb{C}_∞ , então F é uma família normal.

Demonstração: Assumindo que D é um disco, e por composição por uma transformação de Möbius, podemos assumir que todas as funções em F não assumem os valores $0, 1$ e ∞ . Seja $S = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Pelo teorema anterior existe uma transformação de cobertura $\psi : \Delta \rightarrow S$. Seja f^* o levantamento de $f \in F$, de tal modo que $f^* \circ \psi = f$. Então $\{f^* : f \in F\}$ é uma família normal já que é uma família limitada em D , logo F é uma família normal. ■

2.2.2 Conjuntos de Julia e Fatou

Usando as famílias normais podemos definir então o que se entende por comportamento caótico ou previsível de uma órbita.

Definição 2.2.2 *O ponto z é um ponto estável para R se existe uma vizinhança U de z tal que $\{R^n\}$ forma uma família normal em U . O conjunto dos pontos estáveis de R designa-se de conjunto normal ou conjunto de Fatou, e vamos representá-lo por F_R .*

Definição 2.2.3 *O conjunto instável é o complementar de F_R , que é conhecido por conjunto de Julia, e vamos denotá-lo por J_R .*

O conjunto de Fatou é um conjunto aberto por definição; ele tem de ser ou vazio ou denso em \mathbb{C}_∞ e frequentemente apresenta uma estrutura desconexa. O conjunto de Julia tem de ser, assim, um conjunto fechado e como veremos não é vazio. Pela iteração de uma função as imagens de elementos do seu interior continuam no seu interior, sendo assim ambos os conjuntos completamente invariantes.

Proposição 2.2.1 *J_R não é um conjunto vazio.*

Demonstração: Vamos supor que o conjunto era vazio. Então para algum z , podemos encontrar uma vizinhança U e uma subsequência de iterações $\{R^{n_j}\}$ que convergem para uma função analítica $f : U \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ que, pelo princípio da monodromia pode ser estendida analiticamente a \mathbb{C}_∞ . Então f tem de ser uma função racional de grau finito. Mas já que f é o limite de funções cujo grau tendem para ∞ , esta tem de ter grau infinito e temos uma contradição. ■

Nos exemplos seguintes vemos dois conjuntos de Julia muito simples, em que o conjunto de Julia, do segundo exemplo, é construído à custa do primeiro, usando a conjugação topológica.

Exemplo 2.2.1 *Consideremos $R(z) = z^2$. Então $R^n(z) = z^{2^n}$ converge para zero se $\{|z| < 1\}$ e para ∞ se $\{|z| > 1\}$. Logo o conjunto de Julia é o conjunto $\{|z| = 1\}$.*

Exemplo 2.2.2 *Consideremos $R(z) = z^2 - 2$. Se usarmos o homeomorfismo $H(z) = z + \frac{1}{z}$, em que $H : \{|z| > 1\} \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus [-2, 2]$, verificamos que $H(z^2) = R(H(z))$ para todo z e então $z \rightarrow z^2$ e $z \rightarrow z^2 - 2$ são topologicamente conjugadas. Logo o conjunto de pontos que escapam para o ∞ é $\mathbb{C}_\infty \setminus [-2, 2]$. Assim o conjunto de Julia neste caso é o conjunto de pontos no eixo real $[-2, 2]$.*

Proposição 2.2.2 *Se $z \in F_R$ então a sua imagem e todas as suas pré-imagens estão em F_R .*

Demonstração: Seja U uma vizinhança de z na qual as iterações de R , definidas por R^n , formam uma família normal. Como R é analítica então $R(U)$ é aberto. Se R^{n_j} é uma sequência convergente em U temos que R^{n_j-1} é uma sequência convergente em $R(U)$.

De forma semelhante $R^{-1}(U)$ é aberto e, em cada componente de $R^{-1}(U)$, R^{n_j+1} é uma sequência convergente. ■

Assim, como F é invariante então, por J ser o seu complementar, temos que o conjunto de Julia, J , também é invariante.

O facto do conjunto de Julia ser completamente invariante conduz a que este possua auto-semelhança. Isto é, sempre que $R(z_1) = z_2$, em J_R , com $R'(z_1) \neq 0$, existe uma transformação conforme, isomorfismo, de uma vizinhança N_1 , de z_1 , em uma vizinhança N_2 , de z_2 , que transforma $N_1 \cap J_R$ precisamente em $N_2 \cap J_R$.

Os pontos do conjunto de Julia exibem, também, a propriedade de que qualquer ponto na sua vizinhança tem uma dinâmica em que existe uma dependência sensível às condições iniciais. Ou seja, qualquer mudança nas condições iniciais levam a resultados muito diferentes após um grande número de iterações.

Da proposição anterior tira-se a conclusão que $F_{R^k} = F_R$ e daí haver coincidência também nos respectivos conjuntos de Julia.

Teorema 2.2.4 *Para qualquer $N \geq 1$ o conjunto de Julia de R coincide com o conjunto de Julia de R^N .*

Demonstração: Os conjuntos de Fatou para R e R^N são iguais, já que $\{R^N\}$ é normal num conjunto aberto U se e só se $\{R^{nN}\}$ é normal em U . ■

Se $z \in J_R$ não pode haver alguma vizinhança U para a qual as iterações de R formam uma família normal. Assim pelo Teorema de Montel, $\bigcup_n R^n(U) \supset \mathbb{C}_\infty - E_R$, onde E_R é o conjunto excepcional e é completamente invariante.

Teorema 2.2.5 *(Transitividade) Seja z_1 um ponto arbitrário do conjunto de Julia $J_R \subset \mathbb{C}_\infty$ e seja N uma vizinhança arbitrária de z_1 . Então a reunião U de imagens futuras $R^n(N)$ contém todo o conjunto de Julia, e contém todos os pontos de \mathbb{C}_∞ , à excepção de, quando muito, dois pontos.*

Demonstração: Primeiro notamos que o conjunto complementar $\mathbb{C}_\infty \setminus U$ pode conter, quando muito, dois pontos. Caso contrário, como $R(U) \subset U$, segue do Teorema de Montel que U tem de estar contido no conjunto de Fatou, e isto é impossível pois $z_1 \in U \cap J_R$. De novo, usando o facto de que $R(U) \subset U$, vemos que cada pré-imagem de um ponto $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus U$ tem de pertencer ao conjunto finito $\mathbb{C}_\infty \setminus U$. Assim, alguma pré-imagem de z será periódica, já que z é periódico e pertence ao conjunto excepcional E_R . Uma vez que o conjunto de Julia e E_R são disjuntos, segue-se que $J_R \subset U$. Assim, fazendo N pequeno o suficiente tal que $N \subset \mathbb{C}_\infty \setminus E_R$ então $U = \mathbb{C}_\infty \setminus E_R$. ■

Se $E_R = \{e\}$, podemos conjugar R de forma a que $e = \infty$. Como E_R é completamente invariante, e tem apenas a si mesmo como pré-imagem, assim e é ponto crítico com multiplicidade $d - 1$, onde d é o grau de R , logo R é um polinómio.

Pode-se verificar que o ponto ∞ é sempre estável para um polinómio pois $|z| > M$, para M suficientemente grande, $|R^n(z)| \sim |z|^{d^n} \rightarrow \infty$.

Se $E_R = \{a, b\}$ podemos conjugar R de forma a que $a = 0$, $b = \infty$. De novo, como E_R é completamente invariante ambos os pontos são críticos com multiplicidade $d - 1$,

e $R = cz^{\pm d}$, para algum $c \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$. Ambos os pontos de E são claramente estáveis. Qualquer transformação que não seja conjugada com uma destas duas transformações tem um conjunto excepcional vazio.

Como resultado temos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.3 *Se J contém um subconjunto não vazio aberto então $J = \mathbb{C}_\infty$.*

Demonstração: Seja U um conjunto aberto no interior de J . Pelo teorema de Montel, $\bigcup_n R^n(U) \supset \mathbb{C}_\infty - E_R$ e pela invariância de J , $J \supset \mathbb{C}_\infty - E_R$. Como J é fechado e E contém, quando muito, dois pontos, $J = \mathbb{C}_\infty$. ■

2.2.3 Conjunto de Fatou vazio

O primeiro caso, em que $J = \mathbb{C}_\infty$, sendo o conjunto de Fatou vazio, foi descoberto por Lattès em 1918, com a transformação racional

$$z \longrightarrow \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)}$$

Outros casos foram sendo detectados, como por exemplo, Guckenheimer descobriu que a função

$$R(z) = \frac{(z - 2)^2}{z^2}$$

também gozava da mesma propriedade.

Se analisarmos esta última função verificamos que possui dois pontos críticos, um em $z = 0$ e o outro em $z = 2$. Através da iteração de R verificamos a seguinte órbita $2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \infty \longrightarrow 1 \longrightarrow 1$, o que indica que tanto 0, como 2, possuem órbitas eventualmente periódicas.

Esta última observação leva-nos ao seguinte teorema que estabelece a relação entre os pontos críticos e o facto do conjunto de Fatou ser o conjunto vazio.

Teorema 2.2.6 *Se cada ponto crítico de uma transformação racional R é eventualmente periódico, então $J = \mathbb{C}_\infty$.*

Também a transformação $z \longrightarrow 1 - \frac{2}{z^2}$ goza da mesma propriedade já que é conjugada com a proposta por Guckenheimer, assim como todas as transformações do tipo

$$z \longrightarrow 1 + \frac{w}{z^2}$$

Para obtermos uma caracterização geral das transformações que possuem esta propriedade, de o conjunto de Julia ser toda a esfera de Riemann, podemos usar o seguinte teorema:

Teorema 2.2.7 *Seja R uma transformação racional. Então $J_R = \mathbb{C}_\infty$ se e só se existe algum z cuja órbita futura $\{R^n(z) : n \geq 1\}$ é densa na esfera de Riemann.*

Demonstração: Considere-se $\{B_n : n \geq 1\}$ uma base contável para a topologia em \mathbb{C}_∞ , e D o conjunto dos pontos z tais que a órbita futura $O^+(z)$ é densa na esfera: então z está em D se e só se para todo o k , existe algum n com $R^n(z) \in B_k$ e isto implica que

$$D = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} R^{-n}(B_k).$$

Suponha-se agora que $D = \{\}$. Seja $A_k = \mathbb{C}_\infty - B_k$ e

$$E_k = \bigcap_{n \geq 1} R^{-n}(A_k),$$

assim, como $D = \{\}$, temos

$$\mathbb{C}_\infty = \bigcup_{k \geq 1} E_k$$

Pelo teorema de Baires, \mathbb{C}_∞ não é a união contável de algum conjunto denso, logo, para algum k , o fecho de E_k tem um interior não vazio, e designemos este interior por W . No entanto, E_k é fechado, então existe algum subconjunto não vazio W de E_k . Isto significa que para todo o n , $R^n(W) \subset A_k$, assim em W , as funções R^n não tomam valores em B_k e assim $W \subset F_R$. Isto mostra que se $J_R = \mathbb{C}_\infty$ então $D \neq \{\}$, e assim existe algum z cuja órbita futura é densa na esfera.

Agora suponhamos que J não é toda a esfera, assim $F_R \neq \{\}$, e também que existe algum z cuja órbita futura $O^+(z)$ é densa na esfera. O valor z não está em J , pois se estivesse então teríamos $O^+(z) \subset J$ e assim $O^+(z)$ não podia ser densa na esfera. Assim, z está em alguma componente Ω do conjunto de Fatou. Assim considere-se as componentes

$$\Omega, R(\Omega), R^2(\Omega), \dots$$

de F_R . Como $O^+(z)$ é densa na esfera então deve existir um N tal que $R^N(\Omega)$ encontra Ω , e podemos assumir que N é o mínimo inteiro em que isto acontece.

Se Ω_1 é alguma componente de F_R então, para algum n , $R^n(z) \in \Omega_1$ e assim $R^n(\Omega) = \Omega_1$. Deduzimos que

$$F_R = \Omega \cup R(\Omega) \cup \dots \cup R^{N-1}(\Omega),$$

e que os conjuntos do membro direito desta última igualdade são disjuntos. Conclue-se que Ω é completamente invariante, sob R^N , e que o conjunto $\{R^{kN}(z) : k \geq 1\}$ é denso em Ω . ■

2.2.4 Caracterizando o conjunto de Julia

Definição 2.2.4 (*Bacia de atração*) Se O é uma órbita atratora periódica de período n , definimos bacia de atração como sendo o conjunto aberto $A \subset S$, com S uma superfície de Riemann compacta, o conjunto de todos os pontos $z \in S$ para os quais as sucessivas iterações $R^n(z), R^{2n}(z), \dots$ convergem para algum ponto de O .

Consideremos um ponto fixo z_0 com multiplicador m . Para o caso em que $|m| > 1$ nenhuma sequência resultante da iteração de R pode convergir uniformemente numa vizinhança de z_0 . A primeira derivada de R^n em z_0 é λ^n , que converge para o infinito. Por outro lado se $|m| < 1$, e escolhendo $|\lambda| < c < 1$ teremos pelo teorema de Taylor que $|f(z) - z_0| \leq c|z - z_0|$ para algum z suficientemente próximo de z_0 . Assim as sucessivas iterações de R , restringidas a uma pequena vizinhança, convergem uniformemente para a função $z \rightarrow z_0$. Como um ponto periódico de R é um ponto fixo de alguma iteração f^n teremos o seguinte lema.

Lema 2.2.1 *A bacia de atracção de uma órbita periódica atractora está toda contida no conjunto de Fatou, enquanto que toda a órbita repulsora periódica está contida no conjunto de Julia.*

Proposição 2.2.4 *Se $A \subset \mathbb{C}_\infty$ é a bacia de atracção de alguma órbita periódica atractora, então a fronteira topológica $\partial A = \overline{A} \setminus A$ é igual a todo o conjunto de Julia. Cada componente conexa do conjunto de Fatou $\mathbb{C}_\infty \setminus J$ ou coincide com alguma componente conexa da bacia A ou então é disjunta de A .*

Demonstração: Se N é alguma vizinhança de um ponto do conjunto de Julia então pelo teorema da transitividade temos que algum $R^n(N)$ intersecta A , então o próprio N intersecta A . Logo $J \subset \overline{A}$. Mas J é disjuncto de A logo $J \subset \partial A$. Por outro lado se N é alguma vizinhança de um ponto da fronteira então algum limite das iterações $R^n|_N$ têm de ter um ponto de descontinuidade entre A e ∂A , e assim $\partial A \subset J$. Finalmente, note-se, que cada componente conexa de Fatou intersecta A , já que não pode intersectar a sua fronteira, tem de coincidir com alguma componente de A . ■

Proposição 2.2.5 *Se $w \in J$, então $\bigcup_n R^{-n}(w)$ é denso em J .*

Demonstração: Seja U uma vizinhança de algum elemento $z \in J$. Existe um k tal que $w \in R^k(U)$, e assim, para algum ramo de R^{-k} , $R^{-k}(w) \in U$. ■

Esta proposição sugere um algoritmo para determinar e calcular conjuntos de Julia: Começando por um $z_0 \in J$, primeiro calculamos todos os $R(z_1) = z_0$, depois para todos os z_1 calculamos todos os z_2 tal que $R(z_2) = z_1$, e assim sucessivamente, aproximamo-nos eventualmente perto de cada ponto de J .

Este método é frequentemente usado no caso da família quadrática, já que as equações quadráticas são muito fáceis de resolver. O método é muito insensível aos erros de arredondamento, já que R tende a ser expansiva no seu conjunto de Julia, e R^{-1} tende a ser contractiva. No entanto, traz uma desvantagem, o número d^n cresce muito rapidamente à medida que n cresce, assim são precisas muitas iterações para nos aproximarmos dos pontos do conjunto de Julia.

Lema 2.2.2 *Se S é um conjunto não vazio e completamente invariante sob R então S contém um, dois, ou infinitos componentes.*

Demonstração: Suponha-se que S contém infinitos pontos $S = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$. Já que S é completamente invariante, então existe alguma iteração R^p que fixa cada ponto de S . Seja d o grau de R^p . Pela invariância cada ponto tem uma pré-imagem por R^p , que são eles mesmos, e assim cada um destes tem multiplicidade $d - 1$. Já que o total de pontos críticos é $2d - 2$, k é no máximo 2. ■

Proposição 2.2.6 *J é um conjunto infinito.*

Demonstração: Um conjunto completamente invariante contendo apenas um ou dois pontos tem de ser um conjunto excepcional de um polinómio. Já que os pontos do conjunto excepcional são sempre estáveis, o conjunto não vazio e completamente invariante J tem de conter infinitos pontos. ■

Proposição 2.2.7 *Se R tem grau dois ou superior então J_R não tem pontos isolados.*

Demonstração: Se J_R fosse um conjunto finito este era formado por pontos excepcionais, mas estes como são pontos periódicos superatractores, então pertenciam ao conjunto de Fatou. Então J_R como é infinito então só pode ser formado pelo menos por um ponto limite z_0 , cujas pré-imagens iteradas de z_0 formam um conjunto denso de pontos não isolados em J_R . ■

O conjunto de Julia não é então formado por pontos isolados. Mas no entanto este pode ser formado por inumeráveis subconjuntos conexos ou então pode ser uma peça única conexa.

Proposição 2.2.8 *Para qualquer transformação racional de grau dois ou superior, o conjunto de Julia é conexo, ou tem inúmeras componentes conexas.*

Demonstração: Supunhemos que $J = J_0 \cup J_1$, sendo J_0 e J_1 dois conjuntos compactos disjuntos não vazios. Qualquer um destes dois subconjuntos têm de ser infinitos pois J não tem pontos isolados. Primeiro mostremos que nenhum destes dois conjuntos pode ser conexo.

Começamos por escolher um conjunto aberto U que intersecte J_0 mas não J_1 . Para alguma imagem de $R^n(U)$ vai haver intersecção tanto com J_0 como com J_1 . Caso contrário, dado uma sequência qualquer de iterações de R^n , podíamos escolher um subsequência infinita de iterações R^{n_j} que transforme U num conjunto que falhe um do J_α , omitindo três pontos distintos de \mathbb{C}_∞ , e assim existe uma subsequência que converge de forma uniforme localmente em U . Isto contradiz a hipótese de que U intersecta o conjunto de Julia.

Agora escolhendo n tal que $R^n(U)$ intersecte tanto J_0 com J_1 segue, pela invariância de J que $R^n(J_0)$ intersecta tanto J_0 como J_1 . Assim J_0 pode ser expresso como a reunião disjunta de subconjuntos compactos não vazios $J_{00} = J_0 \cap R^{-n}(J_0)$ e $J_{01} = J_0 \cap R^{-n}(J_1)$.

De forma semelhante, segue por indução em k que qualquer sequência $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ de peças, podemos construir um conjunto compacto não vazio $J_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ tal que $J_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}$

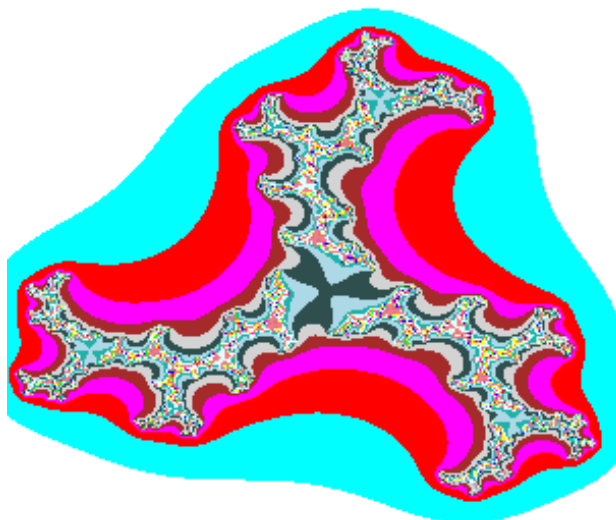


Figura 2.1: Conjunto de Julia para $z^3 + 0.706 + 0.52i$ com inúmeras componentes conexas

é a reunião de subconjuntos compactos disjuntos $J_{\alpha_1 \dots \alpha_k 0}$ e $J_{\alpha_1 \dots \alpha_k 1}$. As correspondentes intersecções infinitas

$$J_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} = \bigcap_k J_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$$

são disjuntas e não vazias, e cada uma contém pelo menos um componente conexo de J .

■

Assim, como fomos vemos ao longo desta secção uma transformação racional ao iterar elementos do conjunto de Julia tem uma dependência sensível às condições iniciais, é topologicamente transitiva e os pontos periódicos em J são densos, logo a transformação racional tem um comportamento caótico em J .

Definição 2.2.5 *Seja V um conjunto e $f : V \rightarrow V$. A função f é dita de caótica em V se f tem dependência sensível às condições iniciais, é topologicamente transitiva e os pontos periódicos são densos em V .*

2.2.5 O conjunto de Julia e os pontos periódicos

Teorema 2.2.8 *Seja R uma transformação racional de grau d , com $d \geq 2$. Então o conjunto de Julia é o conjunto derivado do pontos periódicos de R .*

Demonstração: Começa-se por escolher um conjunto aberto W qualquer que encontre J , e por escolher um ponto w em $W \cap J$ tal que w não é um valor crítico de R^2 . Então $R^{-2}\{w\}$ contém pelo menos quatro pontos, já que o grau de R é maior do que dois, e assim podemos escolher três deles, w_1, w_2 e w_3 , distintos de w . Agora toma-se vizinhanças dos mesmos pontos, compactas, disjuntas duas a duas, W_1, W_2 e W_3 e ainda W em relação

a w , de tal forma que para cada j , R^2 é um homeomorfismo de W_j em W , e considere-se $S_j : W \rightarrow W_j$ a inversa de $R^2 : W_j \rightarrow W$.

Se para todo o $z \in W$, todo o $j \in \{1, 2, 3\}$ e para todo $n \geq 1$, obtivermos

$$R^n(z) \neq S_j(z),$$

então $\{R^n\}$ é normal em W . Mas isto não pode acontecer em $W \cap J$, então existe algum $z \in W$, algum j , e algum n tal que $R^n(z) = S_j(z)$, e assim

$$R^{n+2}(z) = R^2 S_j(z) = z.$$

Isto mostra-nos que z é um ponto periódico de R , que se encontra em W , e que J está contido no conjunto derivado dos pontos periódicos de R . ■

Para mostrar o que o teorema afirma, só nos falta verificar que o conjunto derivado dos pontos periódicos de R está contido em J e assim termos a igualdade preconizada. Para concluir este facto, é suficiente provar o seguinte lema.

Lema 2.2.3 *Qualquer componente de F contém no máximo um ponto periódico de R .*

Demonstração: Seja F_0 um componente de F e suponha-se que α e β são pontos periódicos em F_0 . Substituindo R por uma iteração adequada R^n , podemos assumir que ambos os pontos são fixos por R . Se α é um ponto fixo super-atractor de R , então $R^n \rightarrow \alpha$ em F_0 e assim como R fixa β teremos de ter $\alpha = \beta$. Quando α é um ponto fixo indiferente de R , e então $R : F_0 \rightarrow F_0$ é analiticamente conjugada a uma rotação de ordem infinita no disco unitário. Neste caso, α é o único ponto fixo de R em F_0 , e assim, $\alpha = \beta$. ■

Teorema 2.2.9 *O conjunto de Julia para qualquer transformação racional R de grau superior ou igual a dois é igual ao fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores.*

Demonstração: (Fatou)

Recorde-se que o conjunto de Julia J_R não tem pontos isolados. Assim podemos excluir um número de pontos de J_R , quantos quisermos, sem afectar o argumento.

Seja z_0 um ponto qualquer de J que não seja ponto fixo nem valor crítico. Por outras palavras assumimos que existem d pré-imagens z_1, z_2, \dots, z_d que são distintas umas das outras e de z_0 , onde $d \geq 2$ é o grau de R . Pelo Teorema da Função Inversa, podemos encontrar d funções holomórficas $z \rightarrow \varphi_j(z)$ que são definidas em alguma vizinhança N de z_0 , e que satisfazem $f(\varphi_j(z)) = z$, em que $\varphi_j(z_0) = z_j$. Para algum $n > 0$ e para algum $z \in N$ a função $f^n(z)$ tem de tomar um dos três valores $z, \varphi_1(z)$ ou $\varphi_2(z)$. Caso contrário a família das funções holomórficas

$$g_n(z) = \frac{(f^n(z) - \varphi_1(z))(z - \varphi_2(z))}{(f^n(z) - \varphi_2(z))(z - \varphi_1(z))}$$

em N evitaria os valores 0, 1 e ∞ , e assim seria uma família normal. Logo $\{f^n|N\}$ também seria uma família normal, contradizendo a hipótese de que N intersecta o conjunto de Julia.

Assim podemos encontrar $z \in N$ que satisfaça $f^n(z) = z$ ou $f^n(z) = \varphi_j(z)$. Assim segue que z é um ponto periódico de período n ou $n + 1$, respectivamente.

Isto mostra que nos podemos aproximar de cada ponto de J_R de forma arbitrária através de pontos periódicos, pontos estes em número finito e que têm de ser repulsores.

■

Os pontos periódicos parabólicos também são membros do conjunto de Julia.

Lema 2.2.4 *Todos os pontos parabólicos periódicos estão no conjunto de Julia.*

Demonstração: Seja w um parâmetro local de uniformização, com $w = 0$ correspondente ao ponto periódico. Então alguma iteração R^m corresponde a uma transformação local do plano- w com uma série de potências na forma $w \rightarrow w + a_q w^q + a_{q+1} w^{q+1} + \dots$, onde $q \geq 2$, $a_q \neq 0$. Assim R^{mk} corresponde a uma série de potências $w \rightarrow w + k a_q w^q + \dots$. Logo a derivada de ordem q de R^{mk} em 0 é igual a $q! k a_q$ que tende para o infinito à medida que $k \rightarrow \infty$. Pelo Teorema de Convergência Uniforme de Weierstrass, segue-se que nenhuma subsequência de $\{R^{mk_j}\}$ pode convergir localmente de forma uniforme à medida que $k_j \rightarrow \infty$. ■

2.3 A família quadrática

Um caso particular das transformações racionais e que assume uma importância relevante é a família de funções quadráticas $Q_c(z) = z^2 + c$, com z, c complexos.

2.3.1 O conjunto de Mandelbrot

Se analisarmos a iteração do ponto crítico desta função que é o $z = 0$, verificamos que temos $O^+(0) = \{0, c, c + c^2, c + (c + c^2)^2, \dots\}$.

A função $Q_c(z)$ admite uma órbita atratora de período n quando $Q_c^n(z_0) = z_0$ e $|(Q_c^n(z_0))'| < 1$.

Calculemos, por exemplo, o conjunto dos valores c em que $Q_c(z)$ admite uma órbita atratora de período 1.

A função $Q_c(z)$ tem um ponto atrator fixo, de período um, quando $Q_c(z) = z$ e $|(Q_c(z))'| = |2z| < 1$. A fronteira desta região consiste nos valores c para os quais o valor do módulo da derivada é um, isto é, $2z = e^{it}$.

Logo, $z = \frac{e^{it}}{2}$ e substituindo em $z^2 + c = z$ temos $c = \frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{4}e^{i2t}$, que é a parametrização de um cardióide, com $0 \leq t < 2\pi$.

De modo semelhante, se procurarmos a região onde $Q_c(z)$ tem um ciclo atrator de período dois, podemos verificar que se trata de uma região em forma de circunferência de raio $\frac{1}{4}$ com centro em $c = -1$.

Se continuarmos, iremos obter um retrato descritivo no plano- c do destino da órbita do ponto crítico sob iteração da função $Q_c(z)$. Este conjunto toma o nome de conjunto de Mandelbrot em homenagem ao seu “descobridor”, Benoit Mandelbrot.

Apesar das aparências iludirem, Douady e Hubbard provaram que o conjunto de Mandelbrot é um conjunto conexo.

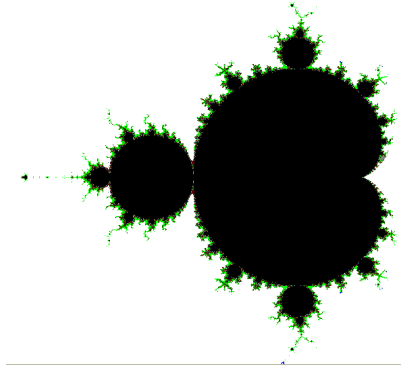


Figura 2.2: Conjunto de Mandelbrot

Podemos ver que o valor c está no conjunto de Mandelbrot se a órbita do zero sob iteração da função $Q_c(z)$ não tende para o infinito, ou seja, os valores de c para os quais a órbita crítica é limitada. Se a órbita de c tende para o infinito então o valor c não está no conjunto de Mandelbrot.

Neste conjunto podemos verificar a existência dos conjuntos onde a função admite órbitas de período um e de período dois, para além de outros conjuntos que estão anexados ao cardióide principal onde a função admite órbitas de períodos mais elevados.

Assim, ao passarmos do cardióide principal para os outros subconjuntos anexos, que são designados de bolbos, passamos por um ponto em que a função altera o seu comportamento. Estes pontos são especiais, são pontos onde se assiste a uma bifurcação da função, onde nasce um novo ciclo atrator.

Cada um dos bolbos no conjunto de Mandelbrot consiste em valores de c , para os quais Q_c admite uma órbita atratora periódica de algum período q associado a um número de rotação $\frac{p}{q}$. Isto é, o ciclo atrator de Q_c tende a ter uma rotação de centro num ponto fixo, rodando aproximadamente $\frac{p}{q}$ revoluções em cada iteração. Por esta razão, cada bolbo recebe a designação de bolbo $\frac{p}{q}$, e vamos denotá-lo por $B_{p/q}$. Em cada um destes bolbos, cada valor de c tem essencialmente o mesmo comportamento dinâmico.

Assim, para os valores c em cada bolbo ligado ao cardióide em $c(p/q)$, Q_c tem um ciclo atrator de período q .

É conhecido que à medida que c segue um percurso no cardióide principal passando por $c_{p/q}$ em direcção a $B_{p/q}$, $c_{p/q}$ sofre uma bifurcação p/q . Isto significa que quando o c está no cardióide principal perto de $c_{p/q}$, Q_c tem um ponto fixo atrator com um ciclo repulsor na sua vizinhança de período q .

Em $c_{p/q}$ o ponto fixo atrator e o ponto fixo repulsor, fundem-se para produzir um ponto fixo neutral com derivada $e^{2\pi ip/q}$. Quando c está em $B_{p/q}$, Q_c tem agora um ciclo atrator de período q e um ponto repulsor fixo.

Quando $c = c_{p/q}$, as dinâmicas locais, linearizáveis, são dadas pela rotação através do ângulo $2\pi p/q$. Como consequência, para os valores de uma vizinhança de $c \in B_{p/q}$, o

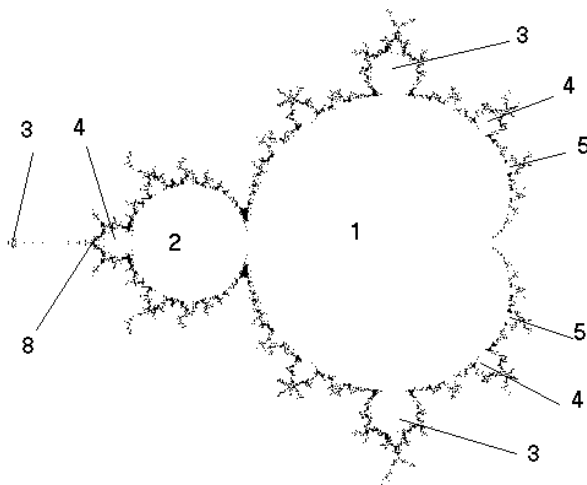


Figura 2.3: Os períodos dos bolbos do conjunto de Mandelbrot

ciclo atrator roda com centro no ponto fixo repulsor saltando aproximadamente $2\pi p/q$ radianos em cada iteração.

A figura 2.4 mostra o período de algumas dessas regiões periódicas para valores pequenos de q .

Como vimos os valores de c que estão dentro do cardióide principal, fornecem órbitas atratoras em que o período é um, sendo uma destas órbitas a órbita crítica de $z = 0$. Ou seja, a órbita crítica tende para uma destas órbitas atratoras a partir de uma certa iteração. Isto permite-nos avaliar que a órbita do ponto crítico tende sempre para a órbita atratora de um dado c de $Q_c(z)$. Este facto é importante, pois se quisermos procurar por órbitas atratoras de uma dada função basta pesquisar as órbitas críticas da mesma. Ou seja, se estas órbitas atratoras existirem, estas ser-nos-ão dadas pelas órbitas críticas.

Uma das mais fascinantes características do conjunto de Mandelbrot, é que podemos retirar o número de rotação p/q directamente da geometria do bolbo correspondente. Cada bolbo p/q admite uma *antena* que consiste de um ponto de junção a partir do qual derivam q ramificações. Uma dessas ramificações está ligada directamente ao bolbo. Esta ramificação é designada de *ramificação principal*. Para muitos desses bolbos, a ramificação “mais pequena” ligada ao ponto de junção está localizado exactamente p/q voltas, em volta do ponto ramificação da ramificação principal na direcção anti-horária, também a “mais comprida” está localizada exactamente p/q voltas da ramificação principal na direcção horária. Este facto nem sempre é verdade, no entanto podemos usualmente julgar onde a mais curta e a mais comprida ramificação devia existir e assim determinar p/q .

Por exemplo, na figura 2.5 está representado um bolbo $\frac{2}{5}$. Note-se que as 5 ramificações estão ligadas num ponto de junção, e assim podemos ver que a ramificação mais curta está localizada de modo não rigoroso $\frac{2}{5}$ de uma volta a partir da antena principal na direcção anti-horária, enquanto que a mais comprida está localizada $\frac{2}{5}$ de uma volta na

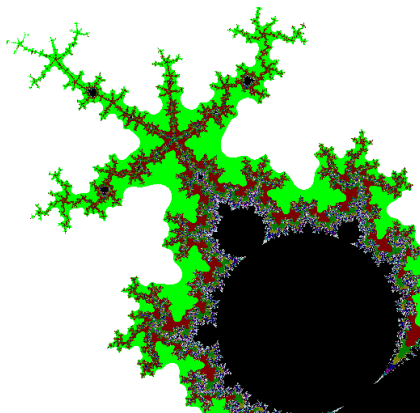


Figura 2.4: Bolbo $\frac{2}{5}$ com a respectiva antena

direcção oposta. No artigo de Devaney e Moreno-Rocha, *Geometry of the Antennas in the Mandelbrot Set*, podemos encontrar uma definição rigorosa para “a mais comprida” e “a mais curta” das ramificações.

Raios externos

Considere-se $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. De acordo com Douady e Hubbard, existe um único isomorfismo analítico Φ que transforma E no exterior do conjunto Mandelbrot. A transformação Φ leva reais positivos em reais positivos. Esta transformação é a uniformização do exterior do conjunto de Mandelbrot, ou a transformação exterior de Riemann.

A importância de Φ resulta do facto que a imagem, sob Φ , dos raios $\theta = \text{constante}$ em E têm uma dinâmica significativa. No conjunto de Mandelbrot, \mathcal{M} , definimos *raio externo* de ângulo externo θ_0 , como sendo a imagem, sob Φ , de $\theta = \theta_0$.

É conhecido que o raio externo cujo ângulo θ_0 é racional cai em \mathcal{M} . Isto é,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \Phi \left(r e^{2\pi i \theta_0} \right)$$

existe e é um ponto único, c , na fronteira de \mathcal{M} .

Este valor c é designado de ponto de chegada do raio com ângulo θ_0 .

Por exemplo, o raio com ângulo 0 está contido no eixo real e cai em \mathcal{M} na inflexão do cardeóide principal, nomeadamente em $c = \frac{1}{4}$. Também, o raio com ângulo $\frac{1}{4}$ está contido no eixo real negativo e cai em \mathcal{M} na ponta da cauda de \mathcal{M} e pode-se mostrar que é $c = -2$.

Consideremos agora o interior de \mathcal{M} . Este consiste em muitas infinitas simples regiões conexas. Um bolbo de \mathcal{M} é um componente do interior de \mathcal{M} em que cada valor c corresponde a uma função quadrática que admite um ciclo atractor. O período deste ciclo é constante em cada bolbo. Em muitos casos, um bolbo está ligado a uma componente de período inferior num único ponto designado o *ponto raiz* da componente.

Um resultado importante de Douady e Hubbard é o seguinte teorema:

Teorema 2.3.1 *Supondo que um bolbo B consiste nos valores c para os quais a transformação quadrática tem um ciclo atrator de período q , então o ponto raiz deste bolbo é o ponto de chegada de exactamente dois raios, e os ângulos de cada um desses raios têm período q sob o efeito da função $D(\theta) = 2\theta \bmod 1$.*

Na função $D(\theta) = 2\theta \bmod 1$, o ângulo θ é periódico sob d só e só se θ é um racional da forma p/q , em forma de fracção reduzida, com q ímpar.

Por exemplo, a órbita de $\frac{1}{3}$ sob D é

$$\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{1}{3} \longrightarrow \dots$$

que tem período 2.

O racional $\frac{1}{7}$ tem período 3 sob a função D ,

$$\frac{1}{7} \longrightarrow \frac{2}{7} \longrightarrow \frac{4}{7} \longrightarrow \frac{1}{7} \longrightarrow \dots$$

enquanto $\frac{1}{5}$ tem período 4:

$$\frac{1}{5} \longrightarrow \frac{2}{5} \longrightarrow \frac{4}{5} \longrightarrow \frac{3}{5} \longrightarrow \frac{1}{5} \longrightarrow \dots$$

Os racionais com denominador par são eventualmente periódicos mas não periódicos. Por exemplo, $\frac{1}{6}$ está num ciclo eventual de período 2,

$$\frac{1}{6} \longrightarrow \frac{2}{6} \longrightarrow \frac{4}{6} \longrightarrow \frac{2}{6} \longrightarrow \dots$$

e $\frac{1}{8}$ é eventualmente fixo:

$$\frac{1}{8} \longrightarrow \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{2} \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow \dots$$

Assim, os ângulos dos raios externos de \mathcal{M} determinam a ordem dos bolbos de \mathcal{M} . Por exemplo, o bolbo grande ligado no lado esquerdo do principal cardeóide é um bolbo $\frac{1}{2}$, logo, dois raios com período 2 sob o efeito da função D têm que cair aí. Os únicos ângulos com período 2 são $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, e daí estes serem os ângulos que caem no ponto raiz de $B_{\frac{1}{2}}$.

Considerando agora o bolbo $\frac{1}{3}$, este está entre os raios 0 e $\frac{1}{3}$. Existem apenas dois ângulos entre 0 e $\frac{1}{3}$ que têm período 3, nomeadamente $\frac{1}{7}$ e $\frac{2}{7}$, assim, estes são os raios que caem no ponto raiz $B_{\frac{1}{3}}$.

O bolbo $\frac{2}{5}$ está entre o bolbo $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, então os raios que caem em $c(\frac{2}{5})$ tem de ter período 5, e estão entre $\frac{2}{7}$ e $\frac{1}{3}$. Os únicos ângulos que possuem esta propriedade são $\frac{9}{31}$ e $\frac{10}{31}$. Podemos ver na figura 2.6 alguns desses raios.

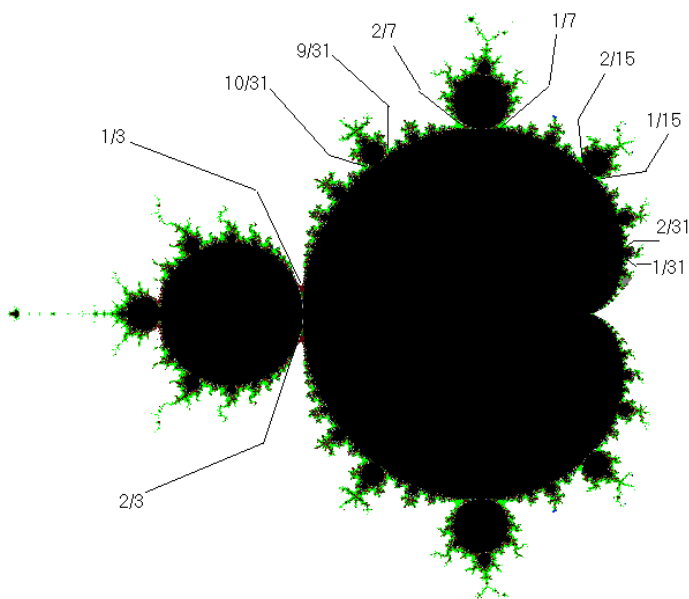


Figura 2.5: Raios externos do conjunto de Mandelbrot

2.3.2 O conjunto cheio de Julia

Agora, se para cada um dos valores c , na função $Q_c(z)$, colecionarmos no mesmo conjunto todos os valores iniciais z_0 cuja órbita não escapa para o infinito sob a iteração de $Q_c(z)$ obtemos um conjunto ao qual designamos de conjunto cheio de Julia, e representamo-lo por FJ_c .

A órbita do valor crítico desempenha um papel importante na estrutura de FJ_c . Este facto foi registado na descoberta efectuada por Fatou e Julia, que ficou conhecido como dicotomia fundamental.

Teorema 2.3.2 (*Dicotomia fundamental*) *Se a órbita crítica tende para o infinito sob iteração de $Q_c(z)$ então FJ_c é um conjunto de Cantor. Se a órbita crítica não escapa para o infinito então FJ_c é um conjunto conexo.*

Por outras palavras, podemos assim estabelecer uma relação directa entre o conjunto de Mandelbrot de $Q_c(z)$ e FJ_c . Se o valor c estiver dentro do conjunto de Mandelbrot, então FJ_c será um conjunto conexo, caso contrário é um conjunto de Cantor. Assim, se seguirmos um caminho qualquer ao longo do interior do conjunto de Mandelbrot, e à medida que nos vamos aproximando da sua fronteira, o conjunto FJ_c vai-se fragmentando.

Por exemplo FJ_0 é um disco unitário com centro na origem.

Se c estiver dentro do cardióide principal do conjunto de Mandelbrot o máximo que podemos assistir no conjunto FJ_c são deformações do círculo unitário, figura 2.7.

A deformação aumenta à medida que c se aproxima de um dos pontos de bifurcação, tendo FJ_c tendência para se fragmentar em figuras que estão intimamente relacionadas

Figura 2.6: Conjunto FJ_c para $c = -0,2685 - 0,01419i$ Figura 2.7: Conjunto FJ_c para $c = 0,2302 + 0,496i$

com o período do ciclo atrator que estão mais próximas. Na figura 2.8 podemos verificar uma proximidade com um ciclo atrator de período quatro.

Quando passamos para um dos bolbos do conjunto de Mandelbrot em que o período é quatro, por exemplo a figura 2.9, o conjunto conexo FJ_c já apresenta uma fragmentação, em que surge uma subdivisão em quatro subconjuntos a partir de um ponto.

Quando c está fora do conjunto de Mandelbrot, FJ_c torna-se num conjunto de Cantor, completamente desconexo, figura 2.10.

Para os polinómios de grau dois $p(w) = a_2w^2 + a_1w + a_0$, podemos obter uma classificação quase completa dos conjuntos de Julia a partir do conjunto de Mandelbrot. O polinómio $p(w)$ é conjugado com $Q_c(z) = z^2 + c$ através de uma transformação de coordenada $w \rightarrow z = a_2w + \frac{a_1}{2}$, com

$$c = a_0a_2 - \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{a_1}{2}\right).$$

Esta transformação muda o ponto crítico $x = -\frac{a_1}{2a_2}$ para a origem. É assim suficiente estudar a natureza dos conjuntos de Julia de $Q_c(z)$ para compreender a dinâmica dos polinómios de grau dois.

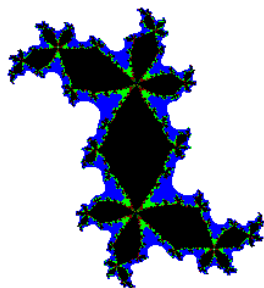


Figura 2.8: Conjunto FJ_c para $c = 0,2893 + 0,5382i$

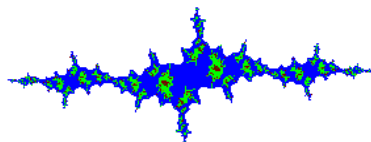


Figura 2.9: Conjunto FJ_c para $c = -1,293 - 0,119i$

Capítulo 3

Superfícies de Riemann e Aplicações Holomórficas

3.1 As superfícies de Riemann

As superfícies de Riemann são variedades bidimensionais com uma estrutura adicional, que definimos a seguir. Uma variedade n -dimensional é um espaço topológico de Hausdorff X , de tal forma que cada ponto pertencente a este espaço possui uma vizinhança que é homeomórfica a um conjunto aberto em \mathbb{R}^n .

Definição 3.1.1 *Seja X uma variedade bidimensional. Um mapa complexo em X é um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de um subconjunto aberto $U \subset X$ em um subconjunto aberto $V \subset \mathbb{C}$. Dois mapas complexos $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ dizem-se holomorficamente compatíveis se a transformação*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(V_1 \cap V_2)$$

é bi-holomórfica.

Definição 3.1.2 *Um atlas complexo em X é um sistema $\mathcal{U} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i, i \in I\}$ de mapas que são holomorficamente compatíveis e que cobrem X , isto é, $\cup_{i \in I} U_i = X$.*

Dois atlas complexos \mathcal{U} e \mathcal{U}' são designados analiticamente equivalentes se cada mapa de \mathcal{U} é holomorficamente compatível com cada mapa de \mathcal{U}' .

Se $\varphi : U \rightarrow V$ é um mapa complexo, U_1 é aberto em U e $V_1 = \varphi(U_1)$, então $\varphi : U_1 \rightarrow V_1$ é um mapa que é holomorficamente compatível com $\varphi : U \rightarrow V$.

A noção de equivalência analítica de atlas complexo é uma relação de equivalência já que a composição de transformações bi-holomórficas é bi-holomórfica.

Definição 3.1.3 *Um estrutura complexa numa variedade bidimensional X é uma classe de equivalência de atlas analiticamente equivalentes em X .*

Assim uma estrutura complexa em X pode ser dada por uma escolha de atlas complexo. Cada estrutura complexa Σ em X contém um único atlas maximal \mathcal{U}^* . Se \mathcal{U} é um atlas arbitrário em Σ , então \mathcal{U}^* são todos os mapas complexos em X que são holomorficamente compatíveis com cada mapa de \mathcal{U} .

Definição 3.1.4 *Uma superfície de Riemann é um par (X, Σ) onde X é uma variedade conexa bidimensional e Σ é uma estrutura complexa em X .*

Normalmente escreve-se X no lugar de (X, Σ) sempre que é claro qual a estrutura complexa Σ usada. Também se pode escrever (X, \mathcal{U}) onde \mathcal{U} é um representante de Σ .

Por convenção, se X é uma superfície de Riemann então por um mapa em X entende-se como um mapa complexo pertencente ao atlas maximal da estrutura complexa em X .

Localmente uma superfície de Riemann é nada mais do que um conjunto aberto no plano complexo.

Se $\varphi : U \rightarrow V$ em que $V \subset \mathbb{C}$ é um mapa em X , então φ transforma o conjunto aberto $U \subset X$ bijectivamente em V . No entanto, qualquer ponto de X está contido em muitos mapas diferentes e nenhum deles é distinguível dos outros. Por esta razão apenas podemos trazer para as superfícies de Riemann as noções da Análise Complexa que permaneçam invariantes sob transformações bi-holomórficas, isto é, as noções que não dependem da escolha de um mapa em particular.

Podemos introduzir alguns exemplos de superfícies de Riemann.

Exemplo 3.1.1 *O plano complexo \mathbb{C} . A sua estrutura complexa é definida pelo atlas cujo único mapa é a transformação identidade $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.*

Exemplo 3.1.2 *(Domínios) Supondo que X é uma superfície de Riemann e que $Y \subset X$ é um domínio, isto é, um subconjunto aberto conexo. Então Y tem uma estrutura complexa natural que o faz superfície de Riemann. Nomeadamente, a que leva todos os mapas complexos $\varphi : U \rightarrow V$ em X , onde $U \subset Y$. Em particular, cada domínio $Y \subset \mathbb{C}$ é uma superfície de Riemann.*

Exemplo 3.1.3 *(A esfera de Riemann \mathbb{C}_∞) Em \mathbb{C}_∞ introduzimos a seguinte topologia. Os conjuntos abertos são os conjuntos abertos usuais $U \subset \mathbb{C}$ juntamente com os conjuntos da forma $V \cup \{\infty\}$, onde $V \subset \mathbb{C}$ é o complementar do conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Com esta topologia \mathbb{C}_∞ é um espaço topológico compacto de Hausdorff, homeomórfico à 2-esfera S^2 . Sejam*

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{C} \\ U_2 &= \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

e as transformações φ_1 , a transformação identidade e

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0, & z = \infty \end{cases}.$$

As transformações φ_1 e φ_2 são homeomorfismos e assim \mathbb{C}_∞ é uma variedade bidimensional. Já que U_1 e U_2 são conexos e a sua intersecção não é vazia \mathbb{C}_∞ é também conexo. A estrutura complexa em \mathbb{C}_∞ é definida pelo atlas consistindo nos mapas $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$. Estes dois mapas são holomorficamente compatíveis, já que $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}_\infty$ e $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \rightarrow 1/z$ é bi-holomórfica.

Exemplo 3.1.4 (O toro) Supondo que ω_1 e $\omega_2 \in \mathbb{C}$ são linearmente independentes sobre \mathbb{R} , definimos

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Γ é designado de rede gerada por ω_1 e ω_2 . Dois números complexos são designados de equivalentes se a sua diferença pertence a Γ . O conjunto de todas as classes equivalentes é denotado por \mathbb{C}/Γ . Seja $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ a projeção canónica, isto, é, a transformação que associa a cada ponto $z \in \mathbb{C}$ a sua classe de equivalência mod Γ . Usemos a topologia seguinte em \mathbb{C}/Γ : Um subconjunto $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ é aberto precisamente se $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ é aberto. Com esta topologia \mathbb{C}/Γ é um espaço topológico de Hausdorff e a transformação quociente $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ é contínua. Já que \mathbb{C} é conexo, \mathbb{C}/Γ é também conexo, assim como compacto, pois é coberto pela imagem sob π do paralelogramo compacto

$$P = \{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 : \lambda, \mu \in [0, 1]\}.$$

A imagem de todo o conjunto aberto $V \subset \mathbb{C}$, por π , é aberto.

A estrutura complexa em \mathbb{C}/Γ é definida da seguinte maneira. Seja $V \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto tal que nenhum par de pontos em V são equivalentes por Γ . Então $U = \pi(V)$ é aberto e $\pi : V \rightarrow U$ é um homeomorfismo. A sua inversa $\varphi : U \rightarrow V$ é um mapa complexo em \mathbb{C}/Γ . Seja \mathcal{U} o conjunto de mapas obtidos dessa forma. Agora só resta mostrar que quaisquer dois mapas $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$ pertencentes a \mathcal{U} são holomorficamente compatíveis. Consideremos a transformação

$$\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Para cada $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ temos $\pi(\psi(z)) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$ e assim $\psi(z) - z \in \Gamma$. Já que Γ é discreta e ψ contínua, implica que $\psi(z) - z$ é constante em todo o componente conexo de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$. Assim, ψ é holomórfica. Da mesma forma, ψ^{-1} também é holomórfica.

Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. A transformação que associa o ponto de \mathbb{C}/Γ , representado por $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$, ao ponto $(e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\mu}) \in S^1 \times S^1$ é um homeomorfismo de \mathbb{C}/Γ no toro $S^1 \times S^1$.

3.2 Holomorfismo

Definição 3.2.1 Seja X uma superfície de Riemann e $Y \subset X$ um subconjunto aberto. A função $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ é designado de holomórfica, se para cada mapa $\psi : U \rightarrow V$ em X a função

$$f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap Y) \rightarrow \mathbb{C}$$

é holomórfica no sentido usual no conjunto aberto $\psi(U \cap Y) \subset \mathbb{C}$. O conjunto de todas as funções holomórficas em Y serão denotadas por $\mathcal{O}(Y)$.

As funções holomórficas gozam de algumas propriedades, como por exemplo, a soma e o produto de funções holomórficas ainda é holomórfica. As funções constante também são holomórficas. Assim o conjunto $\mathcal{O}(Y)$ é uma \mathbb{C} -álgebra.

A condição presente na definição não tem que ser verificada para todos os mapas no atlas maximal em X , mas apenas para qualquer família de mapas que cobrem Y . Assim, automaticamente, a condição é preenchida por todos os outros mapas.

Cada mapa $\psi : U \rightarrow V$ em X é, em particular, uma função de variável complexa em U . Trivialmente esta é holomórfica.

A função ψ designa-se por coordenada local ou parâmetro uniformizador e (U, ψ) uma vizinhança de coordenadas de qualquer ponto $a \in U$. Neste contexto usa-se mais usualmente a letra z no lugar de ψ .

Teorema 3.2.1 (Teorema das Singularidades Removíveis de Riemann) *Seja U um subconjunto aberto de uma superfície de Riemann e $a \in U$. Supondo que a função $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ é limitada em alguma vizinhança de a , temos que f pode ser estendida de forma única a uma função $f^* \in \mathcal{O}(U)$.*

Este último resultado surge directamente do mesmo teorema mas aplicado no plano complexo.

Agora passemos à definição de transformações holomórficas entre superfícies de Riemann.

Definição 3.2.2 *Suponha-se X e Y duas superfícies de Riemann. Uma transformação contínua $f : X \rightarrow Y$ é holomórfica se para cada par de mapas $\psi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ em X e $\psi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ em Y com $f(U_1) \subset U_2$ a transformação*

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$$

é holomórfica no sentido usual.

Uma transformação $f : X \rightarrow Y$ é bi-holomórfica se é bijectiva e ambas as transformações $f : X \rightarrow Y$ e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ forem holomórficas.

Duas superfícies de Riemann X e Y são isomórficas se existir um bi-holomorfismo $f : X \rightarrow Y$.

No caso especial $Y = \mathbb{C}$, as transformações holomórficas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ são as funções holomórficas.

Se X, Y e Z são superfícies de Riemann e $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são transformações holomórficas então a composição $g \circ f : X \rightarrow Z$ é também holomórfica.

Um critério, que nos permite averiguar a existência de um holomorfismo entre duas superfícies de Riemann, que sai directamente da definição e do facto de cada função ψ ser uma função de variável complexa, e que, sendo $Y = \mathbb{C}$ teremos f como função holomórfica usual, é o seguinte:

Lema 3.2.1 *Uma transformação contínua $f : X \rightarrow Y$ entre duas superfícies de Riemann é holomórfica se para cada conjunto aberto $V \subset Y$ e cada função holomórfica $\psi \in \mathcal{O}(V)$, a função $\psi \circ f : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C}$ está contida em $\mathcal{O}(f^{-1}(V))$.*

Neste sentido uma transformação holomórfica $f : X \rightarrow Y$ induz uma transformação

$$f^* : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(V)), \quad f^*(\psi) = \psi \circ f.$$

Teorema 3.2.2 *(Da identidade) Supondo X e Y duas superfícies de Riemann e $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ dois holomorfismos que coincidem num dado conjunto $A \subset X$ tendo um ponto limite $a \in X$, então f_1 e f_2 são identicamente iguais.*

Demonstração: Seja G o conjunto de todos os pontos $x \in X$ tendo uma vizinhança aberta W tal que $f_1 = f_2$ em W .

Por definição G é aberto. Vamos afirmar que G é também fechado. Para o efeito, suponha-se b um ponto da fronteira de G . Então $f_1(b) = f_2(b)$ já que f_1 e f_2 são contínuas. Vamos escolher mapas $\varphi : U \rightarrow V$ em X e $\psi : U' \rightarrow V'$ em Y com $b \in U$ e $f_i(U) \subset U'$. Podemos também assumir que U é conexo.

As transformações

$$g_i = \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V' \subset \mathbb{C}$$

são holomórficas. Já que $U \cap G \neq \{\}$, o Teorema da Identidade para funções holomórficas em domínios de \mathbb{C} implica que g_1 e g_2 são iguais. Assim $f_1 = f_2$ em U . Já que $b \in G$ temos que G é fechado. Agora, já que X é conexo, ou $G = \{\}$ ou $G = X$. Mas se $a \in G$ temos o primeiro caso excluído. Assim sendo, f_1 e f_2 coincidem em todo o X . ■

Definição 3.2.3 *Seja X uma superfície de Riemann e Y um subconjunto aberto de X . Uma função meromórfica em Y é uma função holomórfica $f : Y' \rightarrow \mathbb{C}$, onde $Y' \subset Y$ é um subconjunto aberto, cumprindo as seguintes condições:*

- (i) $Y \setminus Y'$ contém apenas pontos isolados;
- (ii) Para cada ponto $p \in Y \setminus Y'$ teremos $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$.

Os pontos de $Y \setminus Y'$ são designados de pólos de f . O conjunto de todas as funções meromórficas em Y é denotado por $M(Y)$.

Exemplo 3.2.1 *Supondo $n \geq 1$ e $F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$, $c_k \in \mathbb{C}$, temos que $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ define uma transformação holomórfica. Se pensarmos em \mathbb{C} como um subconjunto de \mathbb{C}_∞ , então $\lim_{z \rightarrow p} |F(z)| = \infty$. Assim $F \in M(\mathbb{C}_\infty)$.*

Agora vamos interpretar as funções meromórficas como transformações holomórficas na esfera de Riemann.

Teorema 3.2.3 *Considere-se X uma superfície de Riemann e $f \in M(X)$. Para cada pólo p de f definimos $f(p) = \infty$. Então $f : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ é uma transformação holomórfica. De forma recíproca se $f : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ é uma transformação holomórfica, então f é igual ao ∞*

ou $f^{-1}(\infty)$ é constituída apenas por pontos isolados e $f : X \setminus f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função meromórfica em X .

Assim podemos identificar a função meromórfica $f \in M(X)$ com a transformação holomórfica correspondente $f : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$.

Demonstração: Seja $f \in M(X)$ e P o conjunto dos polos de f . Então f induz uma transformação $f : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ que é contínua. Supondo agora que $\varphi : U \rightarrow V$ e $\psi : U' \rightarrow V'$ são mapas em X e \mathbb{C}_∞ , respectivamente com $f(U) \subset U'$. Temos de mostrar que

$$g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$$

é holomórfica. Já que f é holomórfica em $X \setminus P$, segue-se que g é holomórfica em $V \setminus \varphi(P)$. Então pelo teorema das Singularidades Removíveis de Riemann, g é holomórfica em todo o V . Pelo teorema da Identidade temos o recíproco. ■

Juntando o teorema da Igualdade e o último teorema segue-se que o teorema da Identidade também é válido para funções meromórficas numa superfície de Riemann. Assim qualquer função $f \in M(X)$ que não seja nula só tem zeros isolados. Isto implica que $M(X)$ é um campo.

3.3 Propriedades elementares das transformações holomórficas

Teorema 3.3.1 (*Comportamento local de transformações holomórficas*) *Supondo que X e Y são duas superfícies de Riemann e que $f : X \rightarrow Y$ é uma transformação holomórfica não constante, e que $a \in X$ assim como $b = f(a)$. Então existe um inteiro $k \geq 1$ e mapas $\varphi : U \rightarrow V$, em X , e $\psi : U' \rightarrow V'$, em Y , com as seguintes propriedades:*

(i) $a \in U$, $\varphi(a) = 0$; $b \in U'$, $\psi(b) = 0$.

(ii) $f(U) \subset U'$.

(iii) A transformação $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$ é dada por $F(z) = z^k$ para todo o $z \in V$.

Demonstração: Primeiro notamos que existem mapas $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ em X e $\psi : U' \rightarrow V'$ em Y tal que as propriedades (i) e (ii) são satisfeitas se substituirmos (U, φ) por (U_1, φ_1) . Segue-se, agora, pelo teorema da Identidade que a função

$$f_1 = \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V \subset \mathbb{C}$$

é não constante. Já que $f_1(0) = 0$, existe um $k \geq 1$ tal que $f_1(z) = z^k g(z)$, onde g é holomórfica em V_1 com $g(0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança de 0 e uma função holomórfica h nesta vizinhança tal que $h^k = g$. A correspondência $z \rightarrow z.h(z)$ define uma transformação biholomórfica $\alpha : V_2 \rightarrow V$ de uma vizinhança aberta $V_2 \subset V_1$ de zero numa vizinhança aberta V de zero.

Seja $U = \varphi_1^{-1}(V_2)$. Substituindo o mapa $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ pelo mapa $\varphi : U \rightarrow V$ onde $\varphi = \alpha \circ \varphi_1$ temos então pela própria construção que a transformação $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ satisfaz $F(z) = z^k$. ■

O número k no teorema anterior pode ser caracterizado da seguinte maneira. Para cada vizinhança U_0 de a existem vizinhanças $U \subset U_0$ de a e W de $b = f(a)$ tal que o conjunto $f^{-1}(y) \cap U$ contém exactamente k elementos para cada ponto $y \in W$, $y \neq b$. Chamamos a k a multiplicidade com a qual a transformação f leva o valor b no ponto a , ou simplesmente dizemos que f possui multiplicidade k no ponto a .

Exemplo 3.3.1 *Seja $f(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \dots + c_k$ um polinómio de grau k . Então f pode ser considerada como uma transformação holomórfica $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ onde $f(\infty) = \infty$. Neste caso a multiplicidade do ∞ é k .*

Através do *Teorema do comportamento local das transformações holomórficas* podemos retirar algumas conclusões que a seguir são apresentadas sob a forma de corolário.

Corolário 3.3.1 *Sejam X e Y duas superfícies de Riemann e seja $f : X \rightarrow Y$ uma transformação holomórfica não constante. Então f é aberta, isto é, a imagem de cada conjunto aberto por f é um conjunto aberto.*

Demonstração: Do teorema verificamos que U é uma vizinhança de um ponto $a \in X$, então $f(U)$ é uma vizinhança do ponto $f(a)$. Isto implica que f é aberta. ■

Corolário 3.3.2 *Sejam X e Y duas superfícies de Riemann e seja $f : X \rightarrow Y$ uma transformação holomórfica injectiva. Então f é uma transformação bi-holomórfica de X em $f(X)$.*

Demonstração: Já que f é injectiva, na descrição local dada pelo teorema temos sempre que $k = 1$. Então a transformação inversa $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ é holomórfica. ■

Corolário 3.3.3 *(Princípio máximo) Supondo que X é uma superfície de Riemann e que $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomórfica não constante, então temos que o valor absoluto de f não atinge o seu máximo.*

Demonstração: *Suponha-se que existiria um ponto $a \in X$ tal que*

$$R = |f(a)| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Então

$$f(x) \subset K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Já que $f(X)$ é aberto está no interior de K . Isto contradiz o facto de que $f(a) \in \partial K$. ■

Se tomarmos $f : X \rightarrow Y$ uma transformação holomórfica não constante entre duas superfícies de Riemann, esta ainda possui a capacidade de transformar conjuntos compactos em conjuntos compactos. Pois se considerarmos X como um conjunto compacto, e como uma transformação com estas características transforma conjuntos abertos em conjuntos abertos, então teremos que $f(X)$ também é compacto. Como os únicos conjuntos que são abertos e fechados num dado espaço topológico são o conjunto vazio e o espaço em si, então $f(X) = Y$ e daqui conclui-se que f também é sobrejectiva.

Com esta observação, podemos ainda verificar que, sendo \mathbb{C} um conjunto não compacto, cada transformação holomórfica numa superfície de Riemann compacta é uma transformação constante.

Assim, tomando uma função f meromórfica em \mathbb{C}_∞ esta terá um número finito de pólos, pois se o número de pólos fosse infinito teríamos um ponto limite pelo teorema da Identidade f seria identicamente igual a ∞ . Assumindo que o ponto ∞ não é um pólo de f , caso contrário toma-se $1/f$ no lugar de f , supunhemos que $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ são os pólos de f e que

$$h_v(z) = \sum_{j=-k_v}^{-1} c_{vj}(z - a_v)^j,$$

é a parte principal de f no polo a_v , para $v = 1, \dots, n$. Então temos que a função $g = f - (h_1 + \dots + h_n)$ é holomórfica em \mathbb{C}_∞ e assim constante. Logo pode-se concluir que f é uma função racional. Passemos este resultado a forma de teorema.

Teorema 3.3.2 *Toda a função meromórfica f em \mathbb{C}_∞ é racional.*

Ao considerarmos $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como uma função holomórfica limitada, pelo Teorema das singularidades removíveis de Riemann, f pode ser estendida analiticamente a uma transformação holomórfica $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$. Como \mathbb{C}_∞ é compacto e f holomórfica temos logo que f é constante. Este resultado é conhecido como teorema de Liouville.

Teorema 3.3.3 (Liouville) *Toda a função holomórfica limitada $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é constante.*

Teorema 3.3.4 (Fundamental da Algebra) *Seja $n \geq 1$ e seja $f(z) = z^n + c_1z^{n-1} + \dots + c_n$ um polinómio com coeficientes complexos. Então existe pelo menos um ponto $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(a) = 0$.*

Demonstração: O polinómio f pode ser considerado como uma transformação holomórfica $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, onde $f(\infty) = \infty$. Temos assim que a função é sobrejectiva, já que é holomórfica não constante, e assim $0 \in f(\mathbb{C})$. ■

Definição 3.3.1 (Função duplamente periódica) *Supondo que $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ são linearmente independentes sobre \mathbb{R} e $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ é a rede gerada por ω_1 e ω_2 , uma função meromórfica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ é duplamente periódica em relação a Γ , se*

$$f(z) = f(z + w) \text{ para qualquer } z \in \mathbb{C} \text{ e } w \in \Gamma.$$

Por causa da estrutura da rede Γ para que uma função seja duplamente periódica é suficiente que $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$ para todo o complexo z .

Vamos considerar $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ como sendo a transformação canónica. Então a função duplamente periódica f induz uma função $F : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ tal que $f = F \circ \pi$. Segue-se directamente da definição da estrutura complexa em \mathbb{C}/Γ que F é uma função meromórfica em \mathbb{C}/Γ . Reciprocamente, para qualquer função meromórfica $F : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, a composição $f = F \circ \pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ é uma função meromórfica que é duplamente periódica

em relação a Γ . Assim as funções meromórficas no toro \mathbb{C}/Γ estão em correspondência bi-unívoca com as funções meromórficas em \mathbb{C} , duplamente periódicas em relação a Γ . Assim extraímos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.5 *Toda a função duplamente periódica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é constante. Cada função meromórfica duplamente periódica não constante $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ atinge todo o valor $c \in \mathbb{C}_\infty$.*

Capítulo 4

Estrutura do Conjunto de Fatou

O conjunto estável F_R está dividido numa colecção de mutuamente disjuntos componentes conexos maximizados pelo conjunto de Julia. D_0 é uma destas componentes assim como $R(D_0)$. Para cada uma das componentes D_0 um dos seguintes argumentos tem de ser válido:

(i) As iterações crescentes $R^j(D_0)$ são disjuntos, em que em cada caso D_0 é designado de *errante*

ou

(ii) Existem inteiros $m, n \geq 0$, com $R^n(D_0) = R^m(D_0)$, e D_0 é designado de eventualmente periódico.

A classificação qualitativa e quantitativa dos domínios eventualmente periódicos começou a ser efectuada por Fatou e Julia. Eles estudaram os domínios atractores, super-atractores e parabólicos. A sua análise mostrou que o único tipo de comportamento estável que podia existir seriam os domínios de rotação (os discos de Siegel e os anéis de Herman), mas no entanto não puderam provar a existência destes. A prova foi efectuada por Siegel e por Herman. Fatou conjecturou que os domínios errantes não existiam e assim o comportamento estável era só caracterizado pelos cinco modelos que passaremos a descrever. A classificação foi completa por Sullivan e Shishikura. Nos anos oitenta, Sullivan, viu que a não existência de domínios errantes para transformações racionais era análoga ao Teorema Fundamental da Finidade de Ahlfors para os grupos de Kleinianos, e ele deu uma prova para ambos os teoremas usando as transformações quase-conformes.

4.1 Classificação de Domínios Estáveis

O comportamento dos pontos periódicos estáveis da transformação quadrática é facilmente entendido. Para generalizarmos, estudemos o comportamento local numa vizinhança de um ponto periódico para uma transformação racional arbitrária.

Assumindo que o ponto periódico é no zero escrevemos

$$f(z) = \lambda z + a_k z^k + \dots, k \geq 2.$$

Se $\lambda \neq 0$ e $|z|$ é pequeno então a transformação assemelha-se a $g(z) = \lambda z$; se $\lambda = 0$ assemelha-se a $g(z) = z^k$.

Definição 4.1.1 *As transformações $f : U \rightarrow U$ e $g : V \rightarrow V$ são designadas de conformalmente conjugadas se existe um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$.*

A iteração e periodicidade são, assim, preservadas sob conjugação. Se f é conformalmente conjugada à sua parte linear numa vizinhança de um ponto fixo diz-se que ela é aí linearizável. A ideia de usar a conjugação conforme para estudar a iteração remonta a Schröder. A ideia é de que podemos usar a conjugação para obtermos um comportamento local da dinâmica da transformação.

Teorema 4.1.1 (Schröder) *Um ponto periódico de uma transformação racional com multiplicador $\lambda \neq 0$ é estável se e só se esta for linearizável.*

4.1.1 Ciclos Atractores

Agora suponhamos que z_0 é um ponto atrator de período p , de R .

Teorema 4.1.2 (Koenings) *Se z_0 é um ponto atrator de período p de uma transformação racional R então a primeira função de retorno é linearizável em z_0 . Ainda temos que a transformação conjugada é única a menos da medida usada.*

Demonstração: Como

$$\phi_n(z) = \lambda^{-n} f^n(z),$$

temos

$$\phi_n \circ f = \lambda \phi_{n+1}$$

e, assim, ϕ_n converge uniformemente para algum ϕ em U , e ϕ é a desejada conjugada.

Como $|\lambda| < 1$ temos a convergência, e a unicidade surge do lema de Schwarz. ■

Como nota temos que, se $|\lambda| > 1$, podemos aplicar o argumento anterior ao ramo de f^{-1} que fixa z_0 . Já que f transforma a vizinhança U fora desta a conjugação não está bem definida sob iteração nem nos indica nada sobre a dinâmica da função.

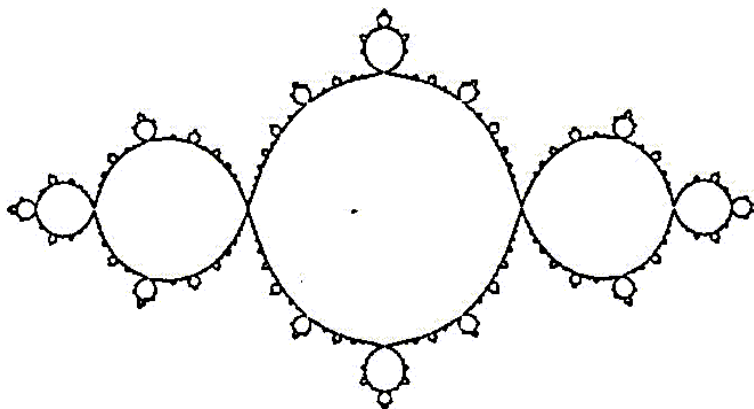
Do teorema de Koenings podemos ver que cada ponto z_k , $k = 0, \dots, p-1$ de um ciclo atrator periódico existe um domínio aberto maximal estável I_k contendo z_k . O conjunto $I = \bigcup_0^{p-1} I_k$ é designado de bacia atratora imediata do ciclo.

O conjunto $A = \bigcup_{n>0} R^{-n}(I)$ é designado de bacia atratora e o ciclo de domínios é designado de ciclo atrator.

Proposição 4.1.1 *A bacia atratora imediata de um ciclo atrator contém sempre um ponto crítico que é atraído para os pontos periódicos.*

Demonstração: Sejam $I_k, k = 0, \dots, p-1$, as p componentes da bacia imediata de atração tal que $R(I_k) = I_{k+1 \bmod p}$. Se não existe nenhum ponto crítico em algum I_k , todas as transformações são transformações de cobertura e assim têm de ser isometrias na métrica de Poincaré. Assim existe uma contradição já que o ciclo é atrator. ■

atractor



10.pdf

Figura 4.1: Ciclo atractor

4.1.2 Ciclos Super-Atractores

Supondo agora que z_0, z_1, \dots, z_{p-1} é um ciclo super-atractor tal que o valor próprio λ é zero. Assim temos:

Teorema 4.1.3 (Böttcher) *Se o ponto fixo z_0 , da primeira função de retorno é super-atractor, e se as primeiras $k - 1$ derivadas desaparecem em z_0 , existe uma conjugação conforme ϕ definida numa vizinhança U de z_0 tal que $\phi \circ f = (\phi(z))^k$. A conjugação ϕ é única a menos da multiplicação por uma $(k - 1)$ - ésima raiz da unidade.*

Demonstração: Seja

$$\phi_n(z) = f^n(z)^{k^{-n}}$$

tal que ϕ_n satisfaz

$$\phi_{n-1} \circ f = (f^{n-1} \circ f)^{k^{-n+1}} = \phi_n^1.$$

A função ϕ_n converge para a conjugação desejada. ■

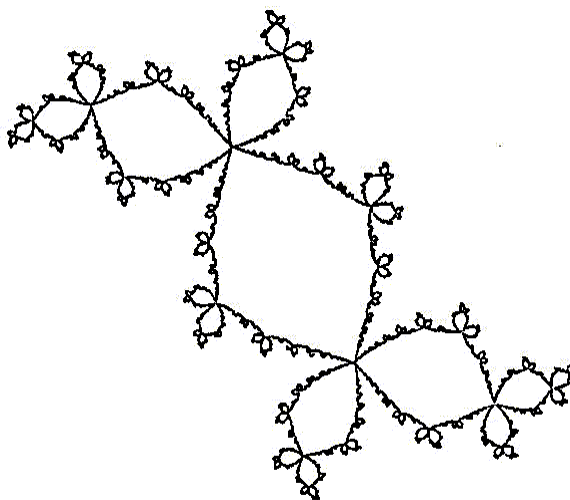
Usando a conjugação é fácil de verificar que os pontos super-atractivos são estáveis. As bacias atractoras, inclusivé a imediata, são definidas como foram para os ciclos atractores e, neste caso, são designados de o ciclo dos dominios periódicos super-atractores.

4.1.3 Pontos Periódicos Neutrais

O caso racional

Suponha-se que z_0 é um ponto periódico neutral cujo valor próprio λ é uma n - ésima raiz da unidade. Este ponto é designado de parabólico. Para determinar o comportamento local, podemos novamente assumir que z_0 é um ponto fixo da primeira transformação de

super atractor



11.pdf

Figura 4.2: Ciclo super-atractor

retorno f . Se z_0 fosse estável, então pelo teorema de Schröder f^n seria conjugada com a transformação identidade numa vizinhança de z_0 .

Usando a expansão em série é fácil notar que a única transformação conjugada com a identidade é ela própria e, assim, por continuação analítica, f^n seria a identidade em qualquer região, o que não faz sentido.

Assim, não podemos modelar o comportamento dinâmico numa vizinhança completa de um ponto parabólico usando a forma linear de uma transformação racional. No entanto, podemos fazê-lo em partes da vizinhança.

Assuma-se $z_0 = 0$ e $\lambda^n = 1$;

A primeira transformação de retorno toma a forma

$$f(z) = \lambda z + a_k z^k + \dots$$

(i) Primeiro assume-se $\lambda = 1, k = 2$. Podemos conjugar f por inversão e escalonamento usando a transformação de Möbius h para obter a seguinte expansão junto ao ∞ para a transformação conjugada:

$$g(z) = z + 1 + \frac{b}{z} + \dots$$

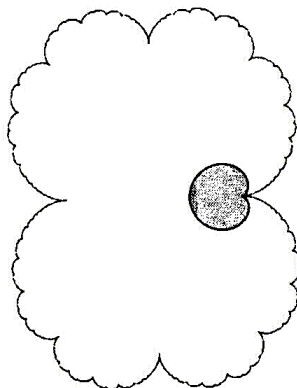
(ii) Agora prova-se que algum semi-plano direito $\operatorname{Re} z > k$, a transformação g é conjugada por uma transformação ϕ a uma transformação $z \rightarrow z + 1$.

A seguir mostra-se que o domínio de definição de ϕ pode ser estendido a um domínio π limitado à esquerda pela parábola $y = 4k(k - x)$; temos $g(\pi) \subset \pi$. Assim, se

$$P = h^{-1}(\pi), f(\overline{P}) \subset P \cup \{0\}$$

e P é um domínio invariante futuro, simétrico em relação ao eixo real, com o ponto fixo na sua fronteira.

atractora



12.pdf

Figura 4.3: Pétala atractora

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(\bar{P}) = \{0\}.$$

O domínio P é designado de pétala atractora.

Note-se que ao longo do raio no eixo real, que surge do ponto fixo, que não está contido na pétala, os pontos são repelidos. Se as mesmas ideias forem aplicadas à função inversa obtemos uma pétala repulsora. As pétalas atractoras estão contidas no domínio estável. As pétalas repulsoras contêm tanto pontos estáveis como instáveis.

(iii) A seguir assumamos $\lambda = 1, k > 2$. Neste caso fazemos uma mudança de variável $z = \zeta^{1/k}$. Obtemos uma sequência de $2(k-1)$ alternadamente pétalas atractoras e repulsoras.

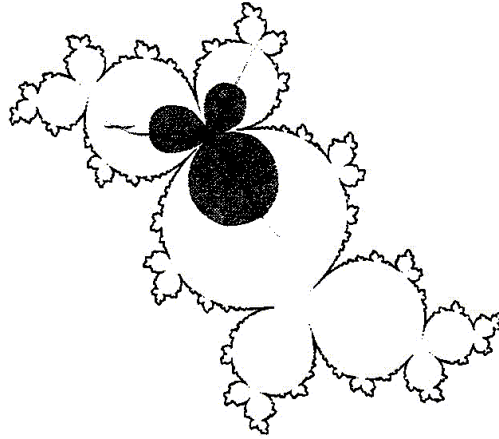
(iv) Finalmente, se $\lambda = e^{2\pi i f/g}$, nós aplicamos a análise precedente a cada um dos q pontos fixos de f^q . As pétalas atractoras não são invariantes de forma futura, mas sim, pontos num dado ciclo de pétalas atractoras próximos das pétalas atractoras de cada um dos pontos periódicos.

Definição 4.1.2 *A bacia atractora imediata do ciclo parabólico é o conjunto maximal de domínios atraídos para o ciclo parabólico, cujas fronteiras contêm pontos do ciclo. Estas bacias contêm as pétalas atractoras. Estas componentes, que são periódicas, são designadas de domínios cíclicos parabólicos.*

Proposição 4.1.2 *A bacia imediata de atracção de um ciclo parabólico contém sempre um ponto crítico que é atraído para os pontos periódicos.*

No caso descrito pela figura 4.5, o ponto crítico está no centro do disco central e está sendo atraído para o ponto crítico superior onde as três regiões se encontram

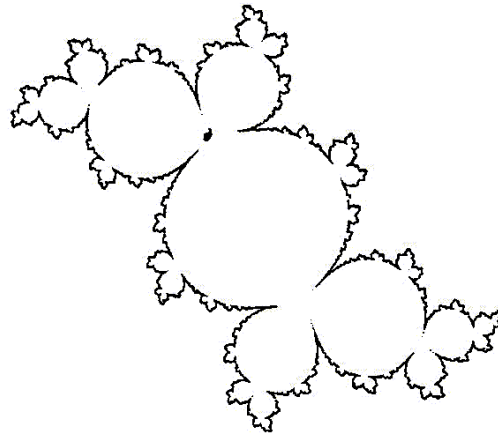
de leau fatou



13.pdf

Figura 4.4: Flor de Leau - Fatou , com $k=3$

parabolico



14.pdf

Figura 4.5: Ciclo Parabólico

O caso irracional

Supõe-se que z_0 é um ponto periódico neutral com valor próprio $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, onde α é irracional. Para estes valores de α , em que o ponto é linearizável, foram-se desenvolvendo muitas questões ao longo dos tempos para os entender.

Siegel e depois Brjuno, e mais recentemente Yoccoz desenvolveram condições para obtermos uma melhor compreensão destas questões.

Teorema 4.1.4 (*Brjuno-Yoccoz*) *Uma condição suficiente para que uma transformação racional R , com ponto periódico neutral, com multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, α irracional, seja linearizável numa vizinhança do ponto é*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty$$

onde p_n/q_n são as fracções contínuas aproximadas a α . Se R é um polinómio quadrático a condição também é necessária.

Discos de Siegel Quando z_0 é um ponto periódico neutral linearizável para a primeira transformação de retorno f , existe uma conjugação $\phi : U \rightarrow \Delta$ que leva uma vizinhança U de z_0 no disco unitário Δ e satisfaz

$$\phi \circ f = e^{2\pi i\alpha} z.$$

A vizinhança U é folheada por folhas invariantes de forma futura que são as pré-imagens do círculo $|\zeta| = r$ em Δ . O domínio maximal para o qual a conjugação pode ser definida é designado de disco de Siegel.

O ciclo periódico neutral define, assim, um ciclo periódico de discos de Siegel.

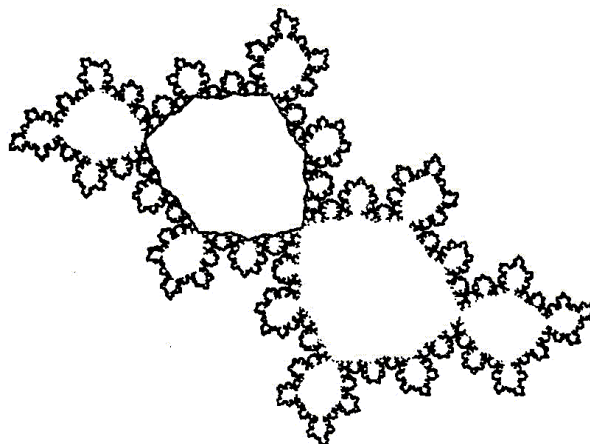
Qualquer ponto crítico que caia num destes discos fica preso na folha do floreamento, mas não é necessariamente verdade que um ponto crítico caia nesta folha. No entanto, suspeita-se apenas que estes domínios existam [Ke 94]. Fatou provou:

Proposição 4.1.3 *Se uma transformação racional tem um ciclo de disco de Siegel, então a órbita crescente de alguns pontos críticos acumulam-se na sua fronteira.*

A prova usa o facto que longe do conjunto pós-crítico, a transformação é uma cobertura regular e assim deve existir uma vizinhança U invariante de forma futura do ponto fixo no disco de Siegel. Se a proposição fosse falsa podíamos encontrar ramos da inversa ao longo da fronteira do disco cuja órbita futura não contivesse U e isto é impossível já que a fronteira é instável. A figura 4.6 mostra como a órbita crítica acumula na fronteira.

Um ponto crítico cuja órbita acumula na fronteira de um disco de Siegel tem de estar no conjunto de Julia. Herman mostrou que existem discos de Siegel cuja fronteira, de facto, contém pontos críticos e encontrou outros que não.

siegel



15.pdf

Figura 4.6: Disco de Siegel

Pontos de Cremer Cremer encontrou os primeiros exemplos de pontos periódicos neutrais que não são linearizáveis e assim o seu nome ficou ligado a eles.

Se U é uma vizinhança de um ponto de Cremer, a órbita crescente de alguns pontos críticos têm de passar por U infinitas vezes. Isto faz com que o conjunto de Julia seja muito complicado em U .

Douady e Hubbard encontraram exemplos de transformações quadráticas cujos conjuntos de Julia não são localmente conexos na vizinhança dos pontos de Cremer.

Anéis de Herman O último tipo de componentes periodicamente estáveis ocorrem apenas para transformações racionais que não são polinômios. Estas componentes são designadas de anéis de Herman pois foi este autor que encontrou os primeiros exemplos.

Um anel de Herman é uma componente do conjunto estável que é topologicamente uma coroa circular e onde a primeira transformação de retorno é conformalmente conjugada a uma rotação irracional numa coroa circular regular. As imagens dos círculos que provêm da coroa circular regular formam uma folheação invariante de forma futura no anel de Herman.

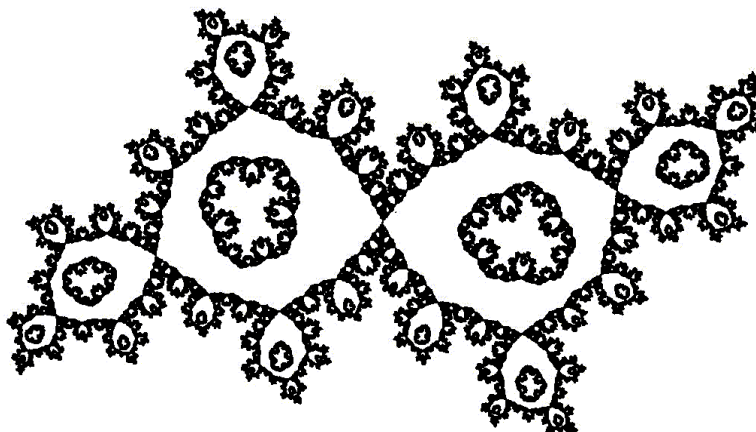
É claro que o anel, não pode conter pontos periódicos. A prova que a fronteira de um anel de Herman A está contida no conjunto de acumulação do conjunto pós-crítico é a mesma do que para os discos de Siegel.

A componente limitada $\mathbb{C}_\infty \setminus A$ é limitada pelo conjunto de Julia e assim tem de conter um pólo da função. Os polinômios, no entanto, nunca têm anéis de Herman. Os exemplos de Herman pertencem à família:

$$R(z) = e^{2\pi i\alpha} z^2 \left(\frac{z-a}{1-az} \right)$$

para as escolhas derivadas de $0 < \alpha < 1$ e $\alpha > 1$.

herman



16.pdf

Figura 4.7: Anel de Herman

Definição 4.1.3 Uma componente U do conjunto de Fatou $\mathbb{C}_\infty \setminus I(f)$ é chamada anel de Herman se U é conformalmente isomórfico a alguma coroa circular

$$A_r = \{z : 1 < |z| < r\}$$

e se f , ou alguma iteração de f , corresponde a uma rotação irracional desta coroa circular.

Existem dois métodos conhecidos para construir anéis de Herman. O método original, devido a Herman, é baseado numa análise cuidada de um difeomorfismo real do círculo. Um outro método, devido a Shishikura, usa cirurgia quase-conforme, começando com duas cópias da esfera de Riemann com um disco de Siegel em cada, cortando parte do centro de cada disco, e, colocando as fronteiras resultantes juntamente em ordem a fabricar o anel [Mi 99].

O método original pode ser descrito da seguinte forma:

Se $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é um homeomorfismo que preserva a orientação, então podemos elevar a um homeomorfismo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a identidade

$$F(t+1) = F(t) + 1,$$

e é unicamente definido, a menos da adição por uma constante inteira.

Definição 4.1.4 O número real

$$\text{rot}(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(t_0)}{n}$$

é independente da escolha de t_0 , e é designado de número de translação do levantamento F . Segundo Poincaré, o número de rotação $\text{rot}(f) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ da transformação circular f é definido como sendo a classe residual de $\text{rot}(F)$ módulo \mathbb{Z} .

Esta construção é bem definida, e invariante sob a orientação que preserva a conjugação topológica [Mi 99]. Podemos assim, deduzir as seguintes propriedades:

Lema 4.1.1 *O homeomorfismo f tem um ponto periódico com período q se e só se o seu número de rotação é racional com denominador q .*

Teorema 4.1.5 (Denjoy) *Se f é um difeomorfismo de classe C^2 , e se o número de rotação $\rho = \text{rot}(f)$ é irracional, então f é topologicamente conjugado à rotação*

$$t \longrightarrow t + \rho \pmod{\mathbb{Z}}$$

Lema 4.1.2 *Considere-se uma família com um único parâmetro de levantamentos da forma*

$$F_\alpha(t) = F_0(t) + \alpha.$$

Então o número de translação $\text{rot}(F_\alpha)$ aumenta continuamente e monotonicamente com α , aumentando $+1$ à medida que α aumenta também $+1$.

Para o caso real analítico o Teorema de Denjoy tem um análogo:

Teorema 4.1.6 (Herman-Yoccoz) *Se f é um difeomorfismo real analítico de \mathbb{R}/\mathbb{Z} e se o número de rotações ρ é diofantino então f é conjugada analiticamente com a rotação $t \longrightarrow t + \rho \pmod{1}$.*

Note-se que um número é diofantino se existe um n grande, e, ε pequeno, tal que a distância de ξ de qualquer número racional p/q satisfaz

$$|\xi - p/q| > \frac{\varepsilon}{q^n}$$

Definição 4.1.5 (Produto de Blaschke) *Dada qualquer constante $a \in \mathbb{C}_\infty$ com $|a| \neq 1$, não é difícil de mostrar que existe uma e uma só transformação fracionária linear $z \longrightarrow \beta_a(z)$ que transforma o círculo unitário $\partial\mathbb{D}$ nele mesmo, fixando o ponto base $z = 1$, e que transforma a em $\beta_a(a) = 0$. Por exemplo, $\beta_0(z) = z$, $\beta_\infty(z) = \frac{1}{z}$, e em geral*

$$\beta_a(z) = \frac{1 - \bar{a}}{1 - a} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, a \neq \infty$$

Se $|a| < 1$, então β_a preserva a orientação do círculo, e transforma o círculo nele mesmo. Por outro lado se $|a| > 1$ então β_a muda a orientação em $\partial\mathbb{D}$ e transforma \mathbb{D} no seu complementar.

Lema 4.1.3 *Uma transformação racional de grau d leva o disco unitário nele mesmo se e só se esta puder ser descrita como um produto de Blaschke,*

$$f(z) = e^{2\pi it} \beta_{\alpha_1}(z) \dots \beta_{\alpha_d}(z)$$

para algumas constantes $e^{2\pi it} \in \partial\mathbb{D}$ e $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}_\infty \setminus \partial\mathbb{D}$.

Esta expressão é única já que as constantes $e^{2\pi it} = f(1)$ e $\{a_1, \dots, a_d\} = f^{-1}(0)$ são unicamente determinadas por f . Os a_j têm de satisfazer as condições de que $a_j \bar{a}_k \neq 1$ para todo o j e k . Para $a\bar{b} = 1$, um breve cálculo mostra que $\beta_a(z)\beta_b(z) \equiv 1$.

Demonstração: Dada f , apenas escolhemos uma solução para $f(a) = 0$, e a seguir dividindo $f(z)$ por $\beta_a(z)$ obtemos uma transformação racional de grau inferior e assim sucessivamente. ■

O produto de Blaschke transforma o disco unitário nele mesmo se e só se $|a_j| < 1$.

No entanto, interessa-nos o caso em que alguns a_j estão dentro do disco e outros fora do disco.

Teorema 4.1.7 *Para qualquer grau ímpar, $d \geq 3$, nós podemos escolher um produto de Blaschke f de grau d que transforma o disco unitário $\partial\mathbb{D}$ nele próprio, por uma orientação preservando o difeomorfismo, com qualquer número de rotação ρ à nossa escolha. Se o número de rotação ρ é diofantino, então f possui um anel de Herman.*

Demonstração: Seja $d = 2n + 1$, e escolha-se a_j de modo a que um número de $n + 1$ destes estejam perto de zero enquanto os restantes n estão próximos de ∞ . Então o produto de Blaschke

$$z \longrightarrow \beta_{a_1}(z)\dots\beta_{a_d}(z)$$

é C^1 -próximo à transformação identidade no círculo unitário $\partial\mathbb{D}$. Em particular, este induz um difeomorfismo que preserva a orientação em $\partial\mathbb{D}$. Agora multiplicando por $e^{2\pi it}$, e, usando o lema 4.1.2 podemos ajustar o número de rotação para qualquer constante desejada.

Se este número de rotação ρ é diofantino, então existe um difeomorfismo real e analítico h em $\partial\mathbb{D}$ que conjuga f à rotação $z \longrightarrow e^{2\pi i\rho}z$.

Já que h é analítico e real, estende-se a um difeomorfismo analítico complexo em alguma pequena vizinhança de $\partial\mathbb{D}$, e assim daí tira-se a conclusão. [Mi 99] ■

Como exemplo, a figura 4.8 mostra o conjunto de Julia de

$$f(z) = e^{2\pi it}z^2(z-4)/(1-4z)$$

que tem como zeros: $0, 0, 4$, onde a constante $t = 0,615132\dots$ é ajustada de modo a que o número de rotação seja $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Existe um ponto crítico junto ao centro da figura, com um anel de Herman à esquerda, rodeando uma bacia superattractora centrada no centro-esquerdo da figura. Este é o exemplo mais simples que podemos encontrar, desde que Shishikura mostrou que este tipo de anel só pode existir se o grau d , pelo menos, for 3.

Os anéis construídos desta forma são muito especiais já que são simétricos em relação ao disco unitário com

$$f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{f(z)}$$

No entanto a construção original de Herman, baseada no trabalho de Helson e Sarason, era mais flexível. [Mi 99]

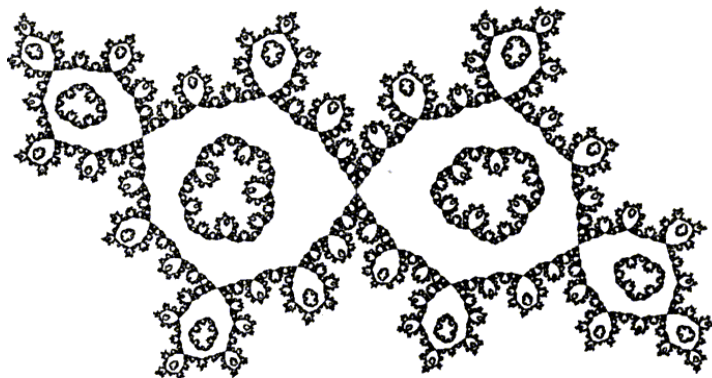


Figura 4.8: Conjunto de Julia para uma transformação racional cúbica, contendo um anel de Herman

A construção de Shishikura mostra claramente que os possíveis números de rotação, para os anéis de Herman, são exactamente os mesmos, para os possíveis números de rotação, para os discos de Siegel.

Em particular, qualquer número satisfazendo a condição de Bryuno, $\sum_n \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} < \infty$, podem ocorrer. A ideia é começar com duas transformações racionais tendo discos de Siegel com números de rotação $+\rho$ e $-\rho$. Corta-se fora um pequeno disco concêntrico em cada, e depois cola-se as respectivas fronteiras. Depois de efectuar as respectivas modificações a corda com infinitas pré-imagens iteradas dos discos de Siegel, Shishikura aplica o Teorema da Medida de Money-Ahlfors-Bers em ordem a conjugar a figura topológica resultante numa transformação racional. Embora os anéis de Herman não contenham pontos críticos eles estão muito associados a estes.

Lema 4.1.4 *Se U é um anel de Herman, então todo o ponto da fronteira de U pertence ao fecho da órbita de algum ponto crítico. A fronteira ∂U tem duas componentes conexas, em que cada uma delas é um conjunto infinito.*

4.2 A classificação de Sullivan dos componentes de Fatou

O trabalho de classificação deve-se principalmente a Fatou e a Julia, mas com grandes contribuições de Sullivan.

Uma componente de Fatou, para uma transformação racional não linear, é designada como sendo qualquer componente do conjugado de Fatou $\mathbb{C}_\infty \setminus J(f)$. Evidentemente f transporta cada componente U em outra componente U' por uma transformação holomorfa.

Primeiro consideremos $U = U'$.

Teorema 4.2.1 (Classificação) *Se f transforma a componente U do conjunto de Fatou nele próprio, então existem quatro possibilidades:*

- i) U é bacia de atracção imediata para um ponto fixo atractor, ou para uma das pétalas do ponto fixo parabólico que tem multiplicador $\lambda = 1$;*
- ii) U é um disco de Siegel ou um anel de Herman.*

Aqui estamos a juntar o caso do ponto fixo superatractor, com $\lambda = 0$, e o caso do ponto fixo atractor geométrico, $\lambda \neq 0$.

Note-se que as bacias de atracção imediatas, ou bacias parabólicas, contêm sempre pontos críticos, enquanto os domínios de rotação (discos de Siegel e anéis de Herman não podem conter pontos críticos).

Demonstração: Temos quatro possibilidades:

- (a) U contém um ponto fixo atractor;*
- (b) todas as órbitas em U convergem para um ponto fixo na fronteira;*
- (c) f é um automorfismo de ordem finita;*
- (d) f é conjugada com uma rotação irracional de um disco furado ou de uma coroa circular.*

No caso (a) as componentes de Fatou contêm pontos fixos atractores, enquanto que o caso (c) não pode ocorrer, já que por hipótese o grau é maior ou igual a dois, e isso, garante que existem, apenas, muitos pontos periódicos contáveis.

No caso (d) não podemos ter um disco furado, já que o ponto onde está o “furo” teria de ser um ponto fixo pertencente ao conjunto de Fatou, assim U seria um subconjunto do disco de Siegel em vez de uma componente de Fatou completa.

Quanto ao caso (b), para provar o teorema, basta apenas mostrar que o ponto fixo na fronteira tem de ser parabólico com $\lambda = 1$.

Este ponto fixo na fronteira, certamente, não pode ser um ponto atractor ou um disco de Siegel já que pertence ao conjunto de Julia. Além de mais, não pode ser repulsor já que atrai todas as órbitas de U , assim tem de ser indiferente, $|\lambda| = 1$.

Para provar que é exactamente $\lambda = 1$ vamos usar argumentos devidos a Douady e Sullivan:

Seja

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

uma transformação que é definida e holomórfica em alguma vizinhança V da origem, e que tem um ponto fixo, com multiplicador λ em $z = 0$.

Lema 4.2.1 (Caracol) *Supondo que existe um caminho $p : [0, \infty] \rightarrow V \setminus \{0\}$ que é transformado nele mesmo por f de tal forma que $f(p(t)) = p(t + 1)$, e que converge para a origem, à medida que $t \rightarrow \infty$. Então ou $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.*

Por outras palavras a origem tem de ser um ponto fixo atractor ou um ponto fixo parabólico com $\lambda = 1$.

Assim para completar a prova do teorema precisamos apenas de considerar o seguinte:

Escolha-se um ponto z_0 em U , sendo U uma componente de Fatou que é transformada nela mesma por uma transformação f de tal forma que todas as órbitas convergem para

um ponto da fronteira w_0 , e escolha-se um caminho qualquer $p : [0, 1] \rightarrow U$ de $z_0 = p(0)$ até $f(z_0) = p(1)$.

Estendendo para todo o $t \geq 0$, fazendo $p(t+1) = f(p(t))$, obtemos um caminho em U que converge para o ponto da fronteira $w_0, t \rightarrow \infty$. Assim, de acordo com o lema do Caracol, o ponto fixo w_0 tem de ser parabólico com $\lambda = 1$ ou atrator. Mas como w_0 pertence ao conjunto de Julia w_0 não pode ser atrator. ■

As componentes de Fatou caso sejam um membro do ciclo dos discos de Siegel ou de anéis de Herman são domínios unicamente definidos pela sua descrição, e são simplesmente conexos, ou infinitamente conexos, caso sejam a bacia de atracção imediata de algum ponto periódico parabólico.

Pode haver, quando muito, um número finito de bacias atractoras e discos de Siegel. Sullivan mostrou também que pode haver, quando muito, um número finito de anéis de Herman, e assim existem em conjunto apenas finitos conjuntos de Fatou periódicos. Mais precisamente, de acordo com Shishikura, pode haver no máximo $2d - 2$ ciclos distintos de componentes de Fatou periódicas.

Teorema 4.2.2 (*Domínios não errantes de Sullivan*) *Toda a componente U de Fatou para uma transformação racional é eventualmente periódica. Isto é, existem necessariamente inteiros $n \geq 0$ e $p \geq 1$ tal que as n -ésimas imagens futuras $f^n(U)$ são transformadas nelas mesmas por f^p .*

Assim cada componente de Fatou é uma pré-imagem, sob alguma iteração de f , de um dos quatro tipos de componentes atrás discriminados.

Corolário 4.2.1 *Se todas as órbitas críticas de uma transformação racional são finitas e a transformação não tem nenhuma órbita super-atractiva, então o seu conjunto de Julia é toda a esfera \mathbb{C}_∞ .*

Tanto o teorema da classificação das componentes de Fatou como dos domínios não errantes de Sullivan falham para funções não racionais $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. De facto surgem dois novos tipos de componentes de Fatou, que não podem ocorrer para transformações racionais. Podem ocorrer domínios errantes e domínios invariantes $U = f(U)$ tal que alguma órbita em U não tem qualquer ponto de acumulação no plano finito \mathbb{C} . Estes últimos são conhecidos como domínios de Baker.

Capítulo 5

Dinâmica simbólica

5.1 O espaço das sequências \sum_2

Para representar simbolicamente a dinâmica das funções vamos precisar de um espaço onde possamos facilmente reconhecer esta mesma dinâmica. Os pontos deste espaço serão constituídos por sequências de zeros e uns.

Definição 5.1.1 $\sum_2 = \{s = (s_0s_1s_2\dots) : s_j = 0 \text{ ou } 1\}$

\sum_2 é designado de espaço das sequências a dois símbolos 0 e 1. Mais genericamente, podemos considerar o espaço \sum_n consistindo de sequências infinitas de inteiros entre 0 e $n-1$. Os elementos de \sum_2 são cadeias numéricas de inteiros como por exemplo (0000...) ou (10101...). Em \sum_2 vamos definir uma métrica, e assim para duas sequências $s = (s_0s_1s_2\dots)$ e $t = (t_0t_1t_2\dots)$ definimos uma distância entre estas por

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Como $|s_i - t_i|$ é zero ou um, esta série infinita é dominada pela série geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

e assim é uma série convergente.

A distância d constitui uma métrica, pois $d[s, t] \geq 0$, para qualquer s e t que pertença a \sum_2 , e $d[s, t] = 0$ se e só se $s_i = t_i$ para todo o i . Já que $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ segue-se que $d[s, t] = d[t, s]$. Finalmente, se r , s e t são elementos de \sum_2 temos que $|r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i|$, de onde se deduz que $d[r, s] + d[s, t] \geq d[r, t]$.

A métrica d permite-nos decidir quais dos subconjuntos de \sum_2 são abertos ou fechados, assim como quais as sequências que estão mais próximas. A próxima proposição fornece-nos uma ferramenta que nos permite ver de uma forma bastante eficaz se estas sequências estão próximas umas das outras ou não, através da simples análise das primeiras entradas na sequência.

Proposição 5.1.1 *Seja $s, t \in \sum_2$ e suponha-se $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Então $d[s, t] \leq \frac{1}{2^n}$. Reciprocamente, se $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$, então $s_i = t_i$ para $i \leq n$.*

Demonstração: Se $s_i = t_i$ para $i \leq n$, então

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

Por outro lado, se $s_j \neq t_j$ para algum $j \leq n$, então teremos de ter

$$d[s, t] \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$$

consequentemente, se $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$, então $s_i = t_i$ para algum $i \leq n$. ■

Definimos a seguir, em \sum_2 a transformação que assume o papel mais propoderante na dinâmica simbólica: a transformação deslocamento.

Definição 5.1.2 *A transformação deslocamento $\sigma : \sum_2 \rightarrow \sum_2$ é dada por $\sigma(s_0s_1s_2\dots) = (s_1s_2s_3\dots)$.*

Com a métrica d definida acima, σ é uma transformação contínua, como a seguir mostramos.

Proposição 5.1.2 *$\sigma : \sum_2 \rightarrow \sum_2$ é contínua.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ e $s = s_0s_1s_2\dots$. Escolha-se um n de tal forma que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Seja $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Se $t = t_0t_1t_2\dots$ satisfaz $d[s, t] < \delta$, então teremos pela proposição anterior $s_i = t_i$ para $i \leq n+1$. Assim, as i -ésimas entradas de $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ são as mesmas para $i \leq n$, e concluímos que $d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. ■

A dinâmica de σ pode ser facilmente entendida. Por exemplo, os pontos periódicos correspondem às seqüências repetidas, isto é, seqüências da forma $s = (s_0, \dots, s_{n-1}, s_0, \dots, s_{n-1}, s_0, \dots, s_{n-1}, \dots)$. Assim, existem 2^n pontos periódicos de período n para σ , cada um deles gerado por cada uma das 2^n seqüências de zeros e uns de comprimento n .

Os pontos eventualmente periódicos são igualmente abundantes e fáceis de reconhecer. Por exemplo, qualquer seqüência da forma $(s_0\dots s_n111\dots)$ é eventualmente fixa, enquanto que qualquer seqüência eventualmente repetida é eventualmente periódica para σ .

Se produzirmos uma seqüência de pontos periódicos τ_n que converge para um ponto arbitrário $s = (s_0s_1s_2\dots)$ em \sum_2 provamos que o conjunto dos pontos periódicos de σ , $Per(\sigma)$, é um conjunto denso. Então, para isso, consideremos a seqüência $\tau_n = (s_0\dots s_n, s_0\dots s_n, \dots)$, ou seja, τ_n é uma seqüência repetida cujas n entradas iniciais são iguais às de s . Assim $d[\tau_n, s] \leq 1/2^n$, e temos que $\tau_n \rightarrow s$. Logo os pontos periódicos de σ formam um conjunto denso em \sum_2 .

Obviamente, nem todos os pontos em \sum_2 são periódicos nem eventualmente periódicos. Qualquer seqüência que não se repita nunca será periódica, e estas ultrapassam em número as que são periódicas.

Existem pontos em Σ_2 cujas órbitas estão arbitrariamente próximas de uma qualquer dada sequência em Σ_2 . Este fenómeno vai acontecer com as transformações que têm uma órbita densa, as topologicamente transitivas.

Assim, podemos resumir as propriedades de σ na seguinte proposição.

- Proposição 5.1.3**
1. $\#Per_n(\sigma) = 2^n$
 2. $Per(\sigma)$ é denso em Σ_2
 3. Existe uma órbita densa para σ em Σ_2 .

5.2 O conjunto S^1

Para estudar a dinâmica da transformação da circunferência $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, o levantamento a \mathbb{R} mostra-se útil. Isto é, definimos a transformação $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ por $\pi(x) = e^{2\pi ix}$.

A transformação π é um exemplo de uma transformação de cobertura já que envolve \mathbb{R} à volta de S^1 sem haver pontos críticos.

Definição 5.2.1 $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um levantamento de $f : S^1 \rightarrow S^1$ se $\pi \circ F = f \circ \pi$.

Se F é um levantamento de f então temos que ter $F'(x) > 0$, e assim F é crescente. Para além disso, temos $F(x+1) = F(x)+1$, e mais genericamente $F(x+k) = F(x)+k$ para algum inteiro k . Sublinhe-se que este facto é verdade, já que f é um difeomorfismo que preserva a orientação na circunferência. Temos também que $F(x+1) - (x+1) = F(x) - x$, e assim, $F - id$ é uma função periódica de período um, onde $id(x) = x$ é a função identidade. De modo semelhante, $F^n - id$ é periódica de período um, já que F^n é um levantamento de f^n . Assim podemos concluir que se $|x - y| < 1$ então $|F^n(x) - F^n(y)| < 1$.

O invariante mais importante associado à transformação da circunferência é o número de rotação. Este número, compreendido entre 0 e 1, essencialmente, mede a quantidade média de pontos que são rodados por uma iteração da transformação, como se viu num dos capítulos anteriores.

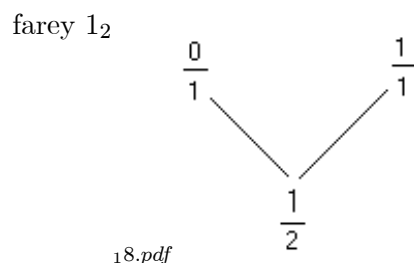
Definição 5.2.2 O número de rotação de f , $\rho(f)$, é a parte fraccionária de $\rho_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}$ para qualquer levantamento F de f . Isto é, $\rho(f)$ é o único número em $[0, 1[$ tal que $\rho_0(F) - \rho(f)$ é um inteiro.

Note-se que os números de rotação são bem definidos para transformações que são unicamente homeomorfismos.

Podemos agora mostrar que o limite $\rho_0(f)$ realmente existe.

Assumindo que f tem um ponto periódico, $f^m(\theta) = \theta$ e $\pi(x) = \theta$. Então $F^m(x) = x+k$ para algum inteiro k . Assim $F^{jm}(x) = x + jk$, e temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(x)|}{jm} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{jm} + \frac{k}{m} \right) = \frac{k}{m}.$$



Mais genericamente, podemos escrever qualquer inteiro n na forma $n = jm + r$ onde $0 \leq r < m$. Note-se que existe uma constante M tal que $|F^r(y) - y| \leq M$ para todo $y \in \mathbb{R}$ e $0 \leq r < m$. Então temos que

$$\frac{|F^n(x) - F^{jm}(x)|}{n} = \frac{|F^r(F^{jm}(x)) - F^{jm}(x)|}{n} \leq \frac{M}{n}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{n} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(x)|}{jm} = \frac{k}{m}.$$

Isto mostra que o número de rotação $\rho(f)$ existe sempre que f tem um ponto periódico, e acima de tudo $\rho(f)$ é racional neste caso, sendo este valor irracional se e só se f não tiver pontos periódicos.

5.3 A Árvore de Farey

A árvore de Farey é uma árvore contendo todos os números racionais entre 0 e 1. Em cada estágio da construção, a árvore de Farey consiste numa lista finita de racionais. Racionais adjacentes nesta lista são designados de *vizinhos Farey*. O passo indutivo na construção desta árvore é o seguinte: cada par de vizinhos Farey produzem um *filho Farey*, que é o racional que está entre os dois racionais cujo denominador é menor. Naturalmente, os racionais que produzem um filho Farey são designados de *pais Farey*.

Definição 5.3.1 (*Adição de Farey*) Sejam $\frac{\alpha}{\beta}$ e $\frac{\lambda}{\tau}$ dois números racionais não negativos e inferiores ou iguais a um. Então a adição de Farey obtém-se da forma seguinte:

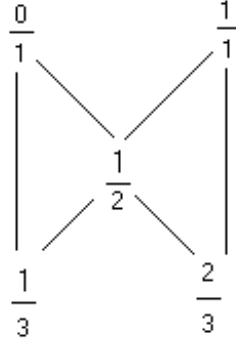
$$\frac{\alpha}{\beta} \oplus \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\alpha + \lambda}{\beta + \tau}.$$

Se somarmos pela adição de Farey dois vizinhos Farey vamos obter um filho Farey.

Começando por 0 e por 1 vamos obter o filho Farey executando a adição de Farey e ficamos assim com o descrito pela figura 5.1.

No próximo nível obtemos dois novos filhos Farey, figura 5.2, e assim sucessivamente, resultando a lista completa de todos os racionais no intervalo $[0, 1]$.

Uma propriedade interessante dos números de Farey é a seguinte.



Proposição 5.3.1 Os racionais $\frac{\alpha}{\beta}$ e $\frac{\lambda}{\tau}$ são vizinhos Farey se e só se $\alpha\tau - \lambda\beta = \pm 1$. Consequentemente, temos

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\lambda}{\tau} \right| = \frac{1}{\beta\tau}.$$

5.4 Descrição simbólica do conjunto de Mandelbrot

O estudo da dinâmica de polinômios complexos conduz a alguns problemas que pertencem à Análise Combinatória e à Teoria dos Números. A dinâmica simbólica pode ser vista como uma poderosa ferramenta para resolver alguns destes problemas.

A transformação $f_0 : z \rightarrow z^k$ no círculo unitário em \mathbb{C} é equivalente à transformação $h : \theta \rightarrow k\theta$ em $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ou ao deslocamento

$$s : (a_1 a_2 \dots) \rightarrow (a_2 a_3 \dots)$$

onde $a_1 a_2 \dots$ representa o número θ na base k . Seja $f_c : z \rightarrow z^k + c$ com $c, z \in \mathbb{C}$ e $K_c = \{z : f_c^n(z) \rightarrow \infty\}$ o conjunto cheio de Julia. Seja $M_k = \{c : K_c \text{ é conexo}\} = \{c : 0 \in K_c\}$. A transformação f_c tem dois pontos fixos, $u(c)$ e $v(c)$. Seja $D_0 = \{c : 0 \text{ é periódico para } f_c\}$, isto é, o centro das componentes hiperbólicas, $D_1 = \{c : f_c \text{ tem um ciclo racional neutral}\}$, isto é, as raízes das componentes hiperbólicas e seja $D_2 = \{c : 0 \text{ é estritamente preperiódico}\}$, os pontos de Misiurewicz.

Douady and Hubbard mostraram que o complemento de M_2 na esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ é conformalmente equivalente ao disco $\mathbb{C}_\infty - D^2$, onde D^2 é o disco unitário fechado. Eles usaram a transformação

$$z \rightarrow \phi_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_c^n(z)]^{1/2^n},$$

que é bem definida para todo o $z \in \mathbb{C}_\infty - K_c$, se K_c é conexo, e a transformação conforme $c \rightarrow \phi_c(c)$ dá-nos $\phi_c : \mathbb{C} - M_2 \rightarrow \mathbb{C} - \overline{D^2}$.

O argumento externo ou ângulo respeitante a K_c é $\arg_c(\phi_c(z))$. Para $z \in J_c = \partial K_c$ podemos definir um valor para $\arg_c(z)$ para cada modo de acesso a z em $\mathbb{C} - K_c$.

Seja $r(c, \theta) = \{z : \arg_c(z) = \theta\}$ o raio externo. Nós escrevemos $\theta \sim \alpha$ se o raio externo $r(c, \theta)$ e $r(c, \alpha)$ tem como destino o mesmo ponto de K_c , isto é, se θ e α são dois

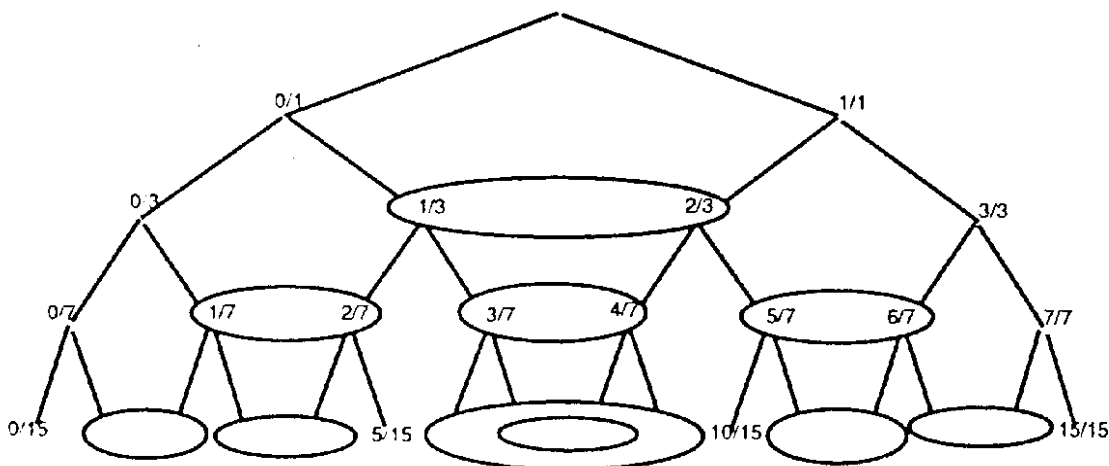


Figura 5.1: Os pares admissíveis dos ângulos externos

argumentos externos de um ponto em J_c . Os argumentos externos θ de c em M_2 são os argumentos externos de c em K_c .

Um ponto $c_0 \in D_0$ está no interior de M_2 , assim, não tem argumentos externos. Um ponto $c_1 \in D_1$, a raiz da componente hiperbólica cujo centro é c_0 tem dois argumentos θ_- e θ_+ que são racionais com denominadores ímpares. Se $c \in D_2$ o número dos argumentos externos é finito, sendo racionais com denominador par.

Agora consideremos o principal componente do interior de M_2 , o cardióide W_1 , que é conformalmente equivalente a um disco. O conjunto W_1 consiste nos valores de c onde f_c tem um ponto atrator fixo para além do ∞ . Os raios internos em W_1 são parametrizados pela derivada de f_c neste ponto fixo. Os pontos em ∂W_1 dos raios internos dos argumentos racionais são também os pontos de chegada de dois raios externos. Assim, se um ponto $c \in \partial W_1$ tem um argumento racional interno na forma irredutível $\alpha = \frac{p}{q}$, um componente de W_q de período q está ligado ao ponto c em W_1 . Assim c tem dois argumentos externos, ou ângulos externos:

$$\theta_- = \frac{a_-}{2^q - 1} \quad \text{e} \quad \theta_+ = \frac{a_+}{2^q - 1}$$

Se $c \in \partial W_1$ tem um argumento interno irracional α então existe um único número real $0 < \theta(\alpha) < 1$ ponto final de um único raio externo. Os ângulos internos são parametrizados pela árvore de Farey.

5.4.1 Árvore dos ângulos externos no conjunto de Mandelbrot

Vamos considerar a árvore representada pela figura XXX dos números racionais com denominador ímpar.

Os números racionais assumem a forma $\frac{n}{2^k - 1}$, onde $n \geq 0$ e $k \geq 1$ são inteiros. Depois formamos os pares de cada nível, depois de retiradas as fracções não primitivas, por ex-

emplo $\frac{5}{15}$, depois fechamos ou formamos os pares de forma a que cada par esteja contido ou inclua os pares dos níveis já definidos, figura 5.3.

Nós podemos escrever as fracções racionais de denominador ímpar $\frac{n}{2^k-1}$ na forma $0.a_1a_2\dots a_k a_1a_2\dots$, onde $a_i \in \{0, 1\}$ e k é o período do bloco na expansão binária periódica. Denotamo-lo por $A = \overline{a_1a_2\dots a_k}$. O conjunto dos pares é designado por CM_2 .

Para os números racionais de denominador par temos a forma $0.b_1b_2\dots b_p a_1a_2\dots a_k a_1a_2\dots$ com $b_i, a_j \in \{0, 1\}$, uma expansão binária preperiódica. Assim temos os blocos $B = 0.b_1b_2\dots b_p \overline{a_1a_2\dots a_k}$.

Se dois ângulos externos (α, β) formam um par, representamo-los pelos blocos na expansão binária $(A^0, A^1) \in CM_2$. É-nos, assim, dado o conjunto das componentes hiperbólicas de M_2 , que são definidos pelos pares admissíveis.

Exemplo 5.4.1 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{2^2-1}, \frac{2}{2^2-1}) = (0.\overline{01}, 0.\overline{10}) \longrightarrow (01, 10)$

Generalizando a sequência de *amassamento*, o itinerário da órbita do ponto crítico, quando c não está necessariamente no eixo real, apresentemos a seguinte codificação.

Seja (α^0, α^1) os ângulos do par (A^0, A^1) . Seja $\alpha = \alpha^0$ ou α^1 então definimos a sequência $S = S_1S_2\dots S_i\dots$ onde:

$$S_i = \begin{cases} R & \text{se } 2^i\alpha \in]\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}[= R_\alpha \\ L & \text{se } 2^i\alpha \in]0, \frac{\alpha}{2}[\cup]\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, 1[= L_\alpha \\ C & \text{se } 2^i\alpha = \frac{\alpha}{2} \text{ ou } \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por exemplo, consideremos o par $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \longrightarrow (01, 10)$.

Para $\alpha = \frac{1}{3}$ definimos os intervalos $R_{1/3} =]\frac{1}{6}, \frac{1}{6} + \frac{1}{2}[$ e $L_{1/3} = [0, \frac{1}{6}[\cup]\frac{1}{6} + \frac{1}{2}, 1[$ e para $\alpha = \frac{2}{3}$ fazemos o mesmo. A seguir estudamos a órbita de h , $h(\alpha) = 2\alpha \bmod 1$ nos intervalos R_α, L_α .

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{3} & \longrightarrow & \frac{2}{3} & \longrightarrow & \frac{1}{3} \\ R & & C & & R \\ \\ \frac{2}{3} & \longrightarrow & \frac{1}{3} & \longrightarrow & \frac{2}{3} \\ R & & C & & R \end{array}$$

Então a sequência de simbolos associada a este par é RC .

Consideremos outro par, por exemplo, $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}) \longrightarrow (011, 100)$.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{3}{7} & \longrightarrow & \frac{6}{7} & \longrightarrow & \frac{5}{7} \\ R & & L & & C \\ \\ \frac{4}{7} & \longrightarrow & \frac{1}{7} & \longrightarrow & \frac{2}{7} \\ R & & L & & C \end{array}$$

Neste par a sequência associada é RLC .

Os códigos dos pares duais próprios são os mesmos que nas sequências de amassamento, para transformações iteradas no intervalo introduzidas por Milnor e Thurston.

Estes pares admissíveis em CM_2 tem um aspecto algébrico que nos permite através da criação de uma operação $*$, operação estrela, obter outros pares admissíveis.

Vamos definir em CM_2 esta operação bem como uma relação de ordem.

Seja (A^0, A^1) o par representado por $A^j = a_1^j a_2^j \dots a_n^j = \prod_{i=1}^n a_i^j$ onde $j = 0, 1$ e $a_i^j \in \{0, 1\}$. Induzimos em CM_2 a ordem natural dos números racionais. Seja A e B duas sequências binárias, uma com comprimento n e outra com comprimento m e seja $r = mmc(m, n)$ assim $r = qn$ e $r = tm$, então $A^* = \prod_{i=1}^q B_i$.

Definição 5.4.1 *Sejam $(A^0, A^1), (B^0, B^1) \in CM_2$ então*

$(A^0, A^1) \triangleright (B^0, B^1)$ *(maior do que) se $A^0 > B^1$*

$(A^0, A^1) \sqsupset (B^0, B^1)$ *(faz parte de) se $A^0 < B^0 < B^1 < A^1$*

Definição 5.4.2 *Seja $(A^0, A^1), (B^0, B^1) \in CM_2$ então*

$$\begin{aligned} (A^0, A^1) * (B^0, B^1) &= \left(\prod_{i=1}^n a_i^0, \prod_{i=1}^n a_i^1 \right) * \left(\prod_{j=1}^m b_j^0, \prod_{j=1}^m b_j^1 \right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n a_i^{b_j^0} \right), \prod_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n a_i^{b_j^1} \right) \right) \end{aligned}$$

onde $a_i^0, a_i^1, b_j^0, b_j^1 \in \{0, 1\}$.

Este produto de pares admissíveis corresponde ao produto estrela na sequência de amassamento.

Assim, generaliza-se a teoria do amassamento para transformações complexas e obtemos a caracterização de todos os pares admissíveis.

Exemplo 5.4.2 *O produto $(011, 100) * (01, 10) = (011100, 100011)$ que corresponde a $RLC * RC = RLLRLC$*

Bibliografia

- [Ba 88] Barnsley, M.F. et al (1988) “*The science of Fractal Images*”, Springer-Verlag
- [Be 91] Beardon, Alan F. (1991) “*Iteration of Rational functions. Complex Analytic Dynamical Systems*”, Springer-Verlag
- [Ca 93] Carleson, Lennart, Gamelin, Theodore W. (1993) “*Complex Dynamics*”, Springer-Verlag
- [Car 79] Carmo, Mafredo Perdigão (1979) “*Geometria riemanniana*”, Projecto Euclides
- [De 89] Devaney, Robert L. (1989) “*An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*”, 2nd edition, Perseus Books
- [De 90] Devaney, Robert L. (1990) “*Chaos, Fractals, and Dynamics. Computer Experiments in Mathematics*”, Addison-Wesley Publishing Company
- [De 94] Devaney, Robert L. et al (1994) “*Proceedings of symposia in Applied Mathematics*”, Vol. 49, American Mathematical Society
- [De 97] Devaney, Robert L. (1997) “The Mandelbrot Set and The Farey Tree”
- [De 00] Devaney, Robert L., Moreno-Rocha, M. (2000) “Geometry of the Antennas in the Mandelbrot Set”
- [Fo 81] Forster, Otto, (1981) “*Lectures on Riemann surfaces*”, Springer-Verlag New York Inc.
- [Ke 94] Keen, L. (1994) “*Proceedings of symposia in Applied Mathematics*”, Vol. 49, American Mathematical Society
- [Li 95] Lind, Douglas, Marcus, Brian (1995) “*An introduction to symbolic dynamics and coding*”, Cambridge University Press
- [Ma 99] Marsden, Jerrold E. et al (1999) “*Basic Complex Analysis*”, 3rd edition, Freeman
- [Mi 99] Milnor, John, (1999) “*Dynamics in one Complex Variable, Introductory Lectures*”, Vieweg

- [Pe 86] Peitgein, H.O., Richter P.H. (1986) “*The beauty of Fractals*”, Springer-Verlag
- [Spr 81] Springer, George, (1981) “*Introduction to Riemann surfaces*”, Chelsea Publishing Company New York, N.Y.
- [So 92] Sorvali, Tuomas, Seppala, Mika (1992) “*Geometry of Riemann surfaces and Teichmuller spaces*”, North-Holland