João Cabral

Doutorado em Matemática, pela Universidade dos Açores
jcabral@uac.pt

Que a prova matemática esteja contigo!

Estamos no início das aulas. Os estudantes tentam dar os primeiros passos no seu curso de eleição nas diversas universidades espalhadas pelo país. Por isso, resolvi falar-vos, caros amigos e assíduos leitores, sobre algo que aflige tanto professores como alunos: o reino da justificação e da prova. Como podemos tentar convencer alguém que estamos certos sobre algo e como podemos justificar o nosso ponto de vista?

Existe um problema com as atuais provas matemáticas, que cada vez mais vão sendo elaboradas pelos atuais matemáticos. As provas têm tendência em afastar-se do que poderíamos chamar de uma prova formal.

A prova formal é rica em detalhes, analisada até ao mais ínfimo dos pormenores, pelo conjunto de investigadores que trabalham com o formalismo lógico, vamos simplificar e chama-los de Lógicos.

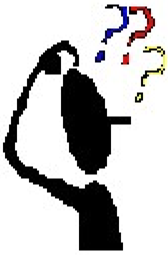
Os matemáticos, como eu, raramente nas suas provas usam, no seu estado perfeito, as regras da lógica. Confesso que muitos de nós temos imensas dificuldades em lidar com o formalismo lógico, quase da mesma forma como um estudante do secundário. Pois ao mesmo tempo que vamos ensinando vamo-nos desprendendo da estrutura lógica, formal e exata de muitos conceitos para facilitar a nossa comunicação com os alunos. Muitas vezes a prova formal e lógica pertence ao reino da prateleira onde está o livro em que a podemos encontrar. Normalmente as nossas "provas" não começam por axiomas – verdades universais, que não carecem de prova - tal como a maioria das demonstrações efetuadas pelos Lógicos. Se estas incluem estruturas de cálculo, validadas de alguma forma, aceites de forma universal, normalmente são justificadas com a inclusão de raciocínios que nada mais são do que uma combinação de argumentos, tendo por base um conjunto de citações oriundas da literatura especializada. Mesmo assim, quase ignorando as estruturas lógicas, estas "provas" são de tal forma arquitetadas que se erguem como estruturas difíceis de serem refutadas e assim são aceites quase de comum acordo por todos. No geral esta é a base de uma demonstração de um Matemático – um argumento, ou conjunto de argumentos, que induz um acordo, que é aceite por todos.

Os argumentos de um Matemático são, quase sempre, tomados como incompletos sob um ponto de vista de um Lógico, mas no entanto induzem acordos. Estes acordos acabam sempre por se converter em estruturas, mesmo sem a colaboração do formalismo lógico, que permitem a criação de raciocínios extremamente complexos, sendo muitas vezes o motor que faz a civilização avançar na Tecnologia.

De facto, o grau da complexidade de uma prova mede a qualidade da matemática produzida por um Matemático. Se for demasiado complexa torna-se muito difícil a sua implementação em algo que seja percetível por todos e usado no avanço civilizacional. Designamos muitas vezes este tipo de matemática, como "demasiado no reino da teoria e do abstrato". Pertencem mesmo só a um conjunto, muito limitado, de iluminados, que vivem fechados sobre si mesmos. Se for muito simples, com um grau de complexidade, quase comparável a um raciocínio infantil, acaba por ser ignorada e tende a entupir a investigação de qualidade, a que realmente contribui para o motor da evolução tecnológica. Por ser muito simples, esta matemática é produzida em muito maior quantidade e tem tendência a espalhar-se rapidamente no meio académico. No fundo, quase que funciona como uma praga que mais cedo ou mais tarde tem de ser expurgada, para que a investigação de qualidade avance, mas infelizmente, até à sua irradicação, acaba por

deixar estragos no seu percurso que podem afetar as fundações da estrutura do raciocínio numa sociedade.
Mas afinal, como podemos criar uma prova, com uma complexidade sem extremos, que contribua para uma investigação de qualidade? Como poderemos criar um acordo sem usar as regras formais da lógica?
A prova criada pelos Matemáticos é gerada da mesma forma que alguns argumentos nascidos nas mais variadas ciências empíricas. Pessoas diferentes, que observam o mesmo conjunto de estrelas à noite, vêm a mesma coisa porque estão a admirar o mesmo conjunto de estrelas. Um grupo formado por diferentes matemáticos, observando o mesmo fenómeno, no mesmo momento, tira indubitavelmente as mesmas conclusões sobre o mesmo. Como existe acordo, então estas conclusões formam regras que por sua vez estabelecem as estruturas de um novo raciocínio. Parece simples, não é? Mas este é um assunto que tem gerado muitas discussões ao longo do tempo, mantendo-se apenas num equilíbrio aceite, um acordo, embora continue com todas as suas verdades escondidas ainda por descobrir. As duas perguntas anteriores continuam ainda sem resposta.
Godfrey Harold Hardy (1877-1947), um famoso matemático inglês, com grandes feitos reconhecidos na Teoria dos Números e na Análise Matemática, interessando-se também por este assunto, escreveu uma carta a um seu amigo, Ludwig Wittgenstein, que ficou famosa por num breve trecho discutir a base de argumentação dos Lógicos, como Russel, o formalismo da linguagem, usado por Hilbert e o conhecimento intuitivo que era aproveitado por Brouwer. Foi talvez, uma das primeiras tentativas em que realmente se tentou explicar o que era uma "prova" matemática, como poderia alguém justificar-se, usando argumentos matemáticos. O texto descrevia como um professor e um seu aluno poderiam claramente obter respostas estruturais diferentes, face a um problema, resultantes da mesma observação, usando técnicas e ferramentas idênticas. O mundo matemático do professor era claramente superior, em termos de conhecimento, em relação ao mundo do aluno, mas isso não impedia que o aluno conseguisse extrair a devida informação, construindo uma justificação que pudesse ser aceite por uma comunidade, sendo por isso válida e constituindo um "acordo". Professor e aluno têm o seu próprio universo matemático, que serve de suporte para as suas próprias observações.
Mas, e a "prova", como podemos provar algo? Por exemplo, se um ornitólogo descobre uma característica única num cisne, para provar que realmente descobriu algo de novo vai ter que divulgar esta descoberta ao máximo número possível de cientistas que se dedicam a estudar os cisnes. Cada um deste vai tirar uma conclusão que por sua vez será também enviada a um conjunto de colegas seus da especialidade. Chega-se a um ponto que a pessoa que iniciou o processo vê confirmada, ou refutada, a sua descoberta, por simples exposição pública e confrontação científica. Com os matemáticos acontece o mesmo. Quando um matemático descobre algo de novo submete a toda a comunidade os seus resultados. Divulga publicamente, em revistas de especialidade, os passos que o levaram ao seu achado. Estes passos por sua vez são esmiuçados por autores de várias áreas científicas, numa máxima exposição pública e confrontação científica. Estes passos podem ser organizados de diversas formas, mas têm que constituir-se num todo como uma estrutura lógica de raciocínio e universal, conduzindo a conclusões que se querem não exageradamente complexas nem demasiado simplistas. Habitualmente uma justificação matemática sustenta um resultado, que só será usado pela sociedade, tido como útil, caso a sua utilidade seja também ela justificada, seguindo o mesmo processo, por outros cientistas nas mais diversas áreas do saber.
Para finalizar dou um exemplo simples. Como podemos provar que a raiz quadrada de dois não é um número racional? Ou seja, não é um número que se possa escrever em forma de fração irredutível, que resulte da divisão de dois números inteiros, tendo estes dois como máximo divisor comum o número um. A prova é encontrada por absurdo – assumimos algo que depois gera um absurdo e assim só pode acontecer o contrário.
Vamos assumir que a raiz quadrada de dois é um número racional, logo podemos escrever a raiz como w/y, sendo o mdc(w,y)=1, ou seja, os números w e y inteiros são primos entre si. Ora, se isso for verdade então 2=(w/y).(w/y) e assim w.w = 2.y.y e assim w tem de ser um número par. Logo, w = 2.k , com k um número inteiro positivo qualquer. Assim temos (2.k).(2.k)=2.y.y e que 4.k.k=2.y.y. e assim y.y=2.k.k, o que faz com que y seja também um número par. Ora, deste

modo tanto w, como y, são números pares, tendo como divisor comum o 2, que é absurdo, visto que afirmamos que só podíamos ter mdc(w,y)=1. Logo a raiz quadrada de dois não pode ser um número racional! De facto, esta raiz é um número irracional e é a medida da diagonal de um quadrado que mede de lado uma unidade de comprimento. Prove!



Proposição $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Demonstração

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota‘x . \beta = \iota‘y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset [*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \iota‘x \cap \iota‘y = \Lambda$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota‘x . \beta = \iota‘y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$