João Cabral

Doutorado em Matemática, pela Universidade dos Açores
joao.mg.cabral@uac.pt

Heine, um Professor no Limite da genialidade

Hoje é quinta-feira, dia 16 de março de 2016, dia em nasceu em 1821 um dos mais famosos matemáticos alemães, Heinrich Eduard Heine. Conseguiu atingir a notoriedade graças aos seus trabalhos em análise real. Um homem que tratava as funções por tu e extraía delas o seu máximo potencial, aumentando a sua beleza através da descoberta de propriedades escondidas, que só a sua mente brilhante conseguiu revelar ao mundo. Tornou-se um gigante na matemática porque soube cultivar os conhecimentos que lhe foram sendo transmitidos pelos seus professores, também eles grandes matemáticos, como o caso de Gauss, Stern, Dirichelet, Steiner e Encke. Quis o destino que um dos seus orientadores de doutoramento fosse Martin Ohm, irmão mais novo do famoso físico Georg Ohm, que também nasceu a 16 de março, cuja lei de Ohm, famosa para quem trabalha com eletricidade, faz o seu nome ecoar na memória dos tempos. Heine, após o seu doutoramento trabalhou na Universidade de Bona, na Alemanha, mantendo o contato com os seus professores e explorando novos tais como Carl Gustav Jacobi, na área da álgebra linear, mas também Neuman, Kirchhoff e Seidel, professores notáveis que procuravam criar pontes de conhecimento entre a física e a matemática. Esta ânsia de saber fez com que se notabilizasse também como um dos melhores professores que lecionava na Universidade, dando o salto, ocupando o lugar, já como Professor Catedrático na Universidade de Halle, também na Alemanha, onde terminou a sua notável carreira. Obteve o reconhecimento internacional, ainda em vida, pelo seu notável trabalho de investigação, tendo recebido a medalha de Gauss em 1877, quando se celebrava o centenário do nascimento de Gauss, um dos seus antigos professores.
Nos nossos dias, o nome de Heine é pronunciado com muita frequência pelos alunos e professores no ensino secundário, juntamente com Cauchy, visto que são as definições de limite de Heine e Cauchy as mais usadas quando se estuda limites de funções pela primeira vez. Mas o que é esse limite? O limite na matemática é dos termos mais usados no domínio da análise, que é ao mesmo tempo um dos mais fáceis de entender, como também um dos mais difíceis de trabalhar à medida que o tempo e o conhecimento avançam no estudo da Matemática.
Para dar uma ideia do conceito de limite ao leitor vamos imaginar o seguinte: uma simples divisão do número 1 por n, que pode ser representada pela fração 1/n. Vamos considerar que n assume os valores 1, 2, 3, …, seguindo a ordem natural dos números. Ao efetuar-se a sucessiva divisão 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, … o valor da dízima desta fração vai-se aproximando cada vez de um número. Sabe qual é? Vá aumentando cada vez mais o valor de n e fazendo as sucessivas divisões. A divisão aproxima-se de zero! Mas será que vai dar mesmo zero? Esta divisão nunca poderá ser zero visto que a única forma de se obter o zero é substituindo o valor um, que está em numerador, pelo zero, obtendo-se 0/n=0. Então se não é zero, que valor se obtém? Dizemos então que, no limite, quando o n for tão grande, mesmo tão grande, tão próximo do infinito quanto possível, que o valor de 1/n é de facto um valor tão próximo de zero que vai possuir o mesmo valor relativo. Matematicamente escrevemos lim(1/n)=0 para dizer que 1/n aproxima-se de zero quando o n caminha para o infinito. Mas, devido às propriedades do sinal "=" que indica que estamos na presença de quantidades com o mesmo valor, então é habitual afirmar que lim(1/n) é de facto o valor 0. Ou seja, que o valor zero vai ser o limite de uma sequência de valores 1, 1/2, 1/3, …, 1/99999, ….

Caso o leitor esteja neste momento um pouco confuso, pense em algo mais simples, mais no domínio do social. O que significa quando dizemos a alguém, em género de aviso, que "a nossa paciência tem um limite?" A palavra limite aqui é usada no mesmo sentido do que o limite da matemática. Estamos claramente a avisar a pessoa que existe um valor, um momento no tempo, que é um marco que a partir do qual, mesmo que não saibamos qual é, se ultrapassado, caímos num estado de irritação. Mas, no fundo não queremos atingir este valor, este marco temporal, por isso será sempre um valor limite, em que a pessoa mesmo que se vá aproximando, testando a nossa paciência, esta vai-se mantendo estável mas progredindo para a instabilidade se o limite da nossa paciência for atingido.
Continuando no domínio do social, de modo a mostrar ao leitor o potencial que os limites têm vamos falar num exemplo da sua aplicação no domínio social. Imagine que está a proferir uma opinião sobre um determinado assunto, num determinado momento do tempo. As pessoas que o ouvem, à medida que vão gostando da sua opinião, vão aplaudindo, concordando consigo, aproximam-se do seu ponto de vista, da sua opinião, mesmo que tenham opiniões ligeiramente diferentes. Assinale esta concordância como sendo uma proximidade entre ideias, uma vizinhança próxima em termos de opinião. Se representar as suas opiniões por X e por Z as opiniões dos que concordam consigo, a divergência de opiniões, entre si e os que o escutam, pode ser representada por $0<|X-Z|<D$, em que D representará o grau máximo de divergência de opinião. Ou seja, a divergência não pode ser nula, visto que assim $X=Z$ e não existem duas opiniões exatamente iguais, e em termos de valor absoluto, o máximo da divergência seria D. Se ultrapassar este valor D significa que a pessoa não concorda consigo e ao existir divergência esta será sempre quantificada com um valor positivo $D>0$.
Agora, já pode formar um grupo que partilha da mesma opinião. Este grupo teve como gerador a sua opinião, por isso é justo que seja representado por F(X). Ou seja, uma opinião coletiva que foi criada tomando por base a sua opinião X. Será que ao partilha-la nas redes sociais, físicas ou virtuais, tipo facebook, esta poderia vingar e cativar outros grupos, de modo a que mais pessoas concordassem consigo? O certo é que poderia de facto acontecer, mas o mais provável é haver uma fusão de ideias que faz brotar uma nova ideia, que vamos designar por L. Assim, podemos dizer que $|F(X)-L|<P$, que as opiniões estão numa vizinhança próxima, estão próximas umas das outras, que existe uma concordância com muitos pontos comuns. O valor P será o grau de divergência atingido na discussão geral, $P>0$, de modo a que todas as opiniões L se aproximam da gerada pelo seu grupo F(X). Em termos de síntese, podemos afirmar que, sempre que quisermos gerar uma qualquer opinião coletiva, com algum significado, $P>0$, numa rede social, a partir de uma opinião nossa, tem de haver um valor $D>0$, tal que $0<|X-Z|<D$ provoque $|F(X)-L|<P$. O que acabamos de definir, usando um enquadramento social, é uma das definições mais famosas na Matemática: a definição de limite de Cauchy de uma função. Usando a linguagem matemática: à medida que o valor X se vai aproximando de Z, sem nunca ser igual, então a função F(X) vai-se aproximando de L. Ou seja, lim $F(X)=L$, quando X tende para Z.
Voltemos agora ao estado inicial, quando está a tentar convencer as pessoas da sua opinião, sobre um qualquer assunto. Imagine que no lugar das pessoas irem concordando consigo agora, estas vão formando opiniões próprias, que se vão aglomerando em pequenos grupos, com opiniões mais ou menos rebuscadas, mas que vistas sob a perspetiva de conjunto, de forma ordenada e organizada, acabam por ir de encontro à sua ideia X. Ou seja, existe um grupo que tem uma ideia X1, outro grupo que uma ideia X2, …, outro grupo que tem uma ideia Xn, e assim sucessivamente de modo que se estruturarmos as ideias através de um raciocínio lógico, X1, X2, …, Xn acabam por convergir para uma determinada ideia, à medida que vão verificando que as opiniões aparentemente divergentes Z acabam, de uma forma ou de outra, rotuladas como sendo a mesma, ou seja $X=Z$. Podemos compactar esta informação dizendo que o conjunto de opiniões {Xn} tem limite, quando $X=Z$.
Como no parágrafo anterior, agora imagine-se que quer cativar outros grupos através da partilha, usando uma rede social. Como a génese da ideia principal X foi diferente, a difusão só vai gerar uma nova opinião L se conseguirmos estabelecer uma ligação coerente entre todas as suas componentes. Assim, cada uma das pequenas ideias, que estão articuladas sob uma certa ordem, vai construir uma nova sequência de opiniões F(X1), F(X2), …, F(Xn), eventualmente gerando um conjunto de novas opiniões. Este conjunto {F(Xn)} tem como limite L. O mesmo

limite que teria F(X), caso X fosse a opinião representante de todas as opiniões geradas por F(X1), F(X2), etc, … ou seja que X=Z. Sintetizando a informação em termos matemáticos: uma função F(X) tem limite L em X=Z, se para cada sequência {Xn} que tenha limite em X=Z, a sequência F(Xn) tem limite L. Esta é a definição de limite, segundo Heine.
O que Heine, como grande matemático que era, conseguiu verificar foi que esta última forma de articular o pensamento, de modo a permitir a difusão da opinião, produz o mesmo tipo de resultado do que a sintetizada à moda de Cauchy, tornando-se mais abrangente, porque respeita a diversidade de elementos que possam existir nos conjuntos que geram os diferentes limites.

Heinrich Eduard Heine
(1821-1881)