João Cabral

Departamento de Matemática e Estatística
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade dos Açores
joao.mg.cabral@uac.pt

# O que significa Sen(x)?

Neste final de ano letivo, os alunos finalistas do 12ºano já começam a preparar-se para os exames que ocorrerão em junho de 2017. Inicia-se um processo de preparação, que muitas vezes apresenta-se como um caminho difícil de trilhar. Cada aluno tem o seu terror e o seu sonho quando se vê confrontado com os possíveis conteúdos que serão avaliados no exame final de matemática. Um destes terrores tem o nome de Trigonometria! Por melhor que o aluno se sinta preparado, os exercícios que envolvem esta ciência são sempre um desafio ao raciocínio e à capacidade de articulação de conteúdos.

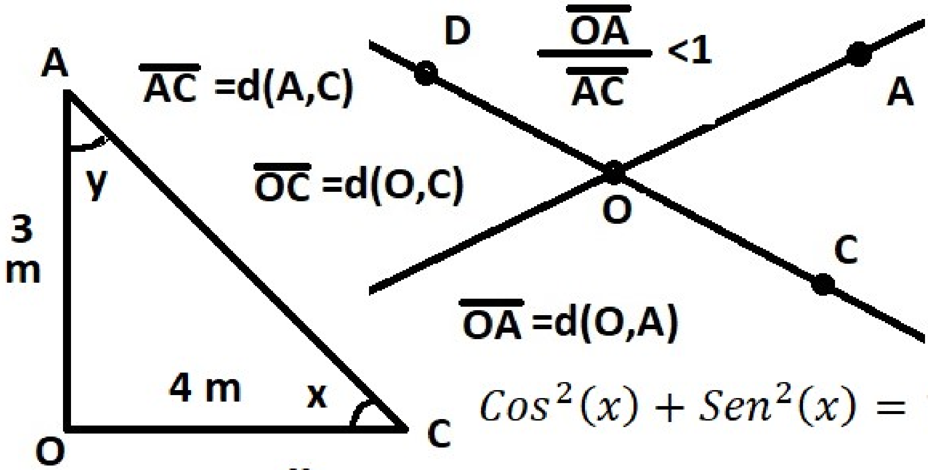
Para que todos nós, mesmo aqueles que dizem que não entendem nada de matemática, consigamos perceber do que estamos a falar, vamos viajar até às origens desta já tão antiga ciência. Para isso peço-lhes que façam uma viagem mental ao longo das próximas linhas. Acredite, vai ficar esclarecido sobre o título deste artigo e muito mais.

Comecemos com o bastante familiar conceito de linha reta. Na Geometria é um conceito bastante fácil. Marquemos dois pontos distintos A e O nesta linha reta. A parte da linha reta que une o ponto A ao ponto O é um segmento de reta e representamos por [OA]. Vamos agora escolher outra reta, que não tenha a mesma direção da anterior, escolhendo dois outros pontos distintos C e D, construindo o segmento [CD]. Como as retas não têm a mesma direção, se elas estiverem assentes no mesmo plano, imagine o chão plano, elas vão encontrar-se num único ponto. As retas dividiram o plano em quatro regiões distintas, que partilham as retas como fronteira. O ponto comum das retas vamos chamar de vértice O e a cada uma das regiões comprendidas entre as retas vamos chamar de ângulo. Vamos agora só considerar uma destas regiões, escolha uma. Note que esta tem como fronteira um ponto, o vértice e duas partes de reta, sendo uma parte de uma reta e a outra parte, de outra reta. Já agora, a estas partes damos o nome de semirretas, pois iniciam num ponto, neste caso o ponto O e não têm fim, passando respetivamente por dois pontos distintos. Para conseguirmos distinguir as duas semirretas, dizemos que uma passa pelo ponto C e a outra pelo ponto A, e escrevemos OC e OA, marcando um pontinho em cima do ponto de origem. Assim, temos uma região limitada por duas semirretas. Sabe como se chama? Simples… é algo que ouvimos todos os dias. Chamamos de ângulo a esta região. Se quisermos medir o tamanho da abertura entre as semirretas, medida conhecida por amplitude, usamos um transferidor e usamos uma unidade angular, como o grau ou o radiano. Zero graus significa que as semirretas estão sobrepostas, não existe qualquer espaço entre elas e noventa graus significa que as semirretas são perpendiculares e o espaço entre elas assemelha-se ao canto de um quadrado. A região que mede 90 graus de amplitude tem o nome de ângulo reto.

Agora, vamos escolher um triângulo retângulo [COA], em que o ângulo com vértice em O mede 90 graus em amplitude. Criamos um triângulo retângulo, cuja soma interna das amplitudes angulares totaliza, sempre, 180 graus. Os lados [OC] e [OA] são designados de catetos e o outro lado [CA] é chamado de hipotenusa. Por uma questão de identificação, vamos dizer que o ângulo, com vértice em A, mede "y" graus de amplitude e o ângulo, com vértice em C, mede "x" graus de amplitude. Pelo famoso Teorema de Pitágoras, conclui-se que adicionando o quadrado do comprimento de um cateto com o quadrado do comprimento do outro cateto,

obtemos o quadrado do comprimento da hipotenusa. Este resultado apenas é válido para todo e qualquer triângulo retângulo.
Quando analisamos o triângulo retângulo é fácil concluir que a hipotenusa é sempre o lado com maior comprimento do triângulo retângulo. Por isso, a divisão entre o valor do comprimento de cada cateto pelo comprimento da hipotenusa é sempre um valor menor do que um. Será impossível que esta divisão seja superior a um! Só mesmo num caso extremo, em que haja dois lados do mesmo tamanho, e aí não teríamos um triângulo, é que esta divisão resulta na unidade.
Agora, damos um salto à realidade, e imagine um muro à sua frente, com 3 metros de altura, que dista 4 metros da posição onde se encontra. Se olhar de frente para o muro, marque um ponto A no topo do muro e um outro ponto O no chão, de modo a que [OA] fique na vertical, e assinale a posição dos seus pés, no chão, como sendo o ponto C. Quer apostar que da posição C até ao ponto A, vamos ter exactamente 5 metros?
Por curiosidade, como pode explicar que um outro muro, na mesma posição, com 7 metros de altura é mais alto, se não se mover do local onde se encontra? A técnica mais usada é por comparação visual, mas ao fazer isso inclina a sua cabeça mais para cima para dizer, a quem está a explicar, que a abertura angular é maior, certo? Esta comparação pode ser guardada para a posteridade se soubermos calcular a amplitude angular, do vértice onde se encontra.
Ao medir o comprimento de [AC], a distância do topo do muro até à posição dos seus pés, d(A,C), e o comprimento de [OA], que é a altura do muro, d(O,A), a divisão d(O,A)/d(A,C) é conhecida como sendo o Seno da amplitude angular, do ângulo com vértice em C, que antes já tínhamos dito que media “x” graus, logo Sen(x). Na prática, esta razão indica-nos que à medida que o muro vai-se tornando mais alto, para observar o seu topo, temos de inclinar mais a nossa cabeça, para podermos olhar mais para cima. O que chamamos de “Seno” é apenas o nome de uma relação entre dois comprimentos, de dois lados, de um triângulo retângulo. Podemos logo concluir que Sen(x)<1, assumindo o valor um, Sen(x)=1, num caso extremo, em que a altura do muro coincide com a distância a que nos encontramos do topo do muro … ora isso só acontece se estivermos mesmo na base do próprio muro, a olhar para cima, na vertical.
Se fizermos d(O,C)/d(A,C) obtemos uma outra relação entre dois lados do triângulo, a que chamamos de “Coseno”, isto é, Cos(x). Neste caso, relaciona a distância determinada pelo nosso afastamento do muro com a distância da nossa posição ao topo do muro. Também aqui não é difícil de verificar que Cos(x)<1 e que só será um quando a altura do muro for zero, pois é a única forma da divisão dos valores que representam a nossa distância à base do muro e ao topo do muro originar um. Qual será a utilidade desta relação?
Na prática, raramente conseguimos medir a distância d(A,C), a não ser que tenhamos equipamento especial de medição. Por isso, a razão mais usada, na resolução de conceitos práticos é a comparação da altura do muro, com a distância a que nos encontramos do mesmo. Não é muito difícil de verificar que d(O,A)/d(O,C)=Sen(x)/Cos(x) e esta razão tem o nome de “Tangente”, tg(x). O valor da amplitude angular tem o nome de inclinação e o valor tg(x) o nome de declive.
Se começarmos a brincar um pouco com o cálculo podemos verificar a existência de relações engraçadas, e ao mesmo tempo fascinantes, como por exemplo o valor que obtemos quando se adiciona o quadrado de Sen(x) com o quadrado de Cos(x). Dá um! Estas relações, por vezes são vistas como de um pesadelo se tratasse pelos alunos, sendo conhecidas como fórmulas trigonométricas, mas nada mais são do um exercício bastante organizado de todas as propriedades que podemos obter quando relacionamos o comprimento dos lados de um triângulo retângulo com a amplitude dos seus ângulos internos. Por isso, seja qual for o problema que esteja a ser resolvido, em que se tem de aplicar as fórmulas trigonométricas, o segredo da sua resolução reside na identificação do triângulo retângulo base que deu origem ao exercício.
Claro, este é só o início da história, mas representa o fundamental quando se pretende navegar pelo mundo das funções trigonométricas. Com a amplitude a assumir valores de 0 graus a 360 graus, as razões Cos(x) e Sen(x), que dão origem às funções trigonométricas com o mesmo nome, podem assumir valores negativos, mas nunca inferiores a -1, assumindo o valor -1 só em condições extremas, permitindo, assim, resolver uma infinidade de problemas práticos e úteis, com aplicação quase imediata a tudo o que nos rodeia.

As aplicações das funções trigonométricas podem ser observadas em quase todos os ramos da Engenharia, sendo as mais notáveis, as presentes na resolução das famosas Equação do Calor e da Onda, interpretadoras do comportamento das ondas de rádio e até mesmo das famosas ondas que são responsáveis pelo “WiFi”, que tanto gostamos de usar, para estabelecer uma ligação ao mundo da Internet, bem como permitem às máquinas registarem uma onda sísmica, através do uso das famosas Séries de Fourier.




$$Cos^2(x) + Sen^2(x) = 1$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, Cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n . Sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$