João Cabral

Departamento de Matemática e Estatística
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade dos Açores
joao.mg.cabral@uac.pt

Monómios, o IAVE e a Prova Final de Matemática 2017

No dia 27 de junho de 2017, milhares de alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico, em Portugal, realizaram a Prova Final de Matemática. Foi uma prova acessível, bem acolhida por todos os alunos e considerada equilibrada pelos professores de matemática, embora com alguns toques a tender para o "fácil". No seu todo a prova até estava bem construída, não recolhendo nenhum tipo de crítica severa por parte das maiores associações de pais e professores. Foram os critérios de correção, depois de publicados no local da internet do IAVE - Instituto de Avaliação Educativa, I.P., que despertaram uma crítica cerrada por parte da S.P.M. (Sociedade Portuguesa de Matemática). A Sociedade apontou uma falha monstruosa existente num critério de correção, que vai ser usado na avaliação de uma das questões da prova. A falha é de tal grandeza que vai fazer que um aluno, mesmo que responda errado à questão, vai obter 75% da classificação, quase como se esta tivesse sido respondida corretamente. Na troca de informação que se seguiu, logo após a publicação desta notícia, pela comunicação social, a equipa que realizou a prova e definiu os critérios de correção não considerou o facto como sendo exatamente um erro, como defende a SPM, mas apenas como sendo um "ponto de vista diferente" na correção.

Na prova, no item 14, pede-se para fatorizar o polinómio x^2-4. O que é isso de fatorizar um polinómio? Significa escrever um polinómio como multiplicação de dois ou mais polinómios. Mas o que é um polinómio? Simples, uma adição de monómios. Mas … já sei, mas o que é um monómio? Um monómio é uma expressão matemática constituída pela multiplicação de um coeficiente, que é um número pertencente a um determinado conjunto de números e a parte literal, que assume a forma não numérica, normalmente representada por uma letra do alfabeto. Note-se que o coeficiente do monómio pode ser o produto de dois ou mais números, bem como a parte literal pode ser o produto de duas ou mais letras, que podem ser iguais ou não. Por ser uma estrutura elementar da construção do raciocínio algébrico o monómio assume uma importância muito grande no ensino da matemática, sendo muito trabalhado ao longo da escolaridade obrigatória em Portugal. Por exemplo, se o número dois for o coeficiente e a letra x a parte literal, então podemos construir o monómio 2.x, representando-se a multiplicação usual por um ponto. Mas, também podemos ter um monómio em que o coeficiente é o número um e a sua parte literal resulta da multiplicação da letra x por ela própria, por exemplo 1.x.x, que normalmente se representa por x^2, usando as propriedades dos monómios. Neste último exemplo, o número dois surge em expoente e é designado de grau do monómio. Existem monómios de grau zero, quando o produto de todas as letras que representam a sua parte literal for um. O monómio de grau zero também pode ser descrito como um monómio em que não escrevemos a parte literal. Por vezes é dito de forma errónea que um monómio de grau zero não tem parte literal, mas este tem sempre parte literal, somente às vezes ela é representada por um produto de letras que origina sempre "um" como resultado, desde que nenhuma das letras represente o valor zero ou o infinito. Assim, por exemplo o número -4 é um monómio de grau zero, cujo coeficiente é o próprio número e a parte literal pode ser representada por uma letra qualquer, cujo expoente é zero. Para construir um polinómio basta apenas adicionar, pelo menos dois monómios. Por exemplo, adicionando o monómio x^2 e o monómio -4, obtemos o polinómio x^2-4.

Trabalhar com monómios, usando as respetivas propriedades, bem com polinómios, torna-se bastante intuito para os alunos portugueses, a partir do 7º ano de escolaridade, porque toda a estrutura de cálculo e raciocínio é, em tudo, semelhante às operações numéricas e respetivas propriedades, já adquiridas em anos anteriores. Assim, à medida que os alunos vão mergulhando no conhecimento dos conjuntos de números e respetivas propriedades, vão de forma intuitiva, também, aprendendo a navegar no mundo dos polinómios. Tal como as operações entre números reais, as operações da adição e multiplicação entre polinómios gozam das propriedades mais elementares tais como a comutativa e associativa, existindo também a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Note-se que a subtração a-b é considerada como sendo a adição a+(-b). Assim, caso queiramos simplificar o polinómio (x-2)(x+2), obtendo uma expressão mais simples, temos de usar a propriedade distributiva duas vezes (x-2).x+(x-2).2=x.x-2.x+x.2-4. Como 2.x e x.2 são expressões que representam o mesmo monómio, então verificamos que $(x-2)(x+2)=x^2-4$.

Para existir uma possível adição entre monómios a sua parte literal tem de ser exatamente igual. Caso a parte literal seja diferente não se pode adicionar monómios. Quando é possível a adição entre monómios, esta faz-se apenas executando a adição entre os seus coeficientes. Por exemplo caso queiramos adicionar o monómio 1.x com o monómio -2.x podemos verificar que a parte literal é a mesma, logo basta calcular 1+(-2)=-1 e assim x-2x=-x.

A expressão x-2.x+2, representa uma adição de três monómios, e agora é fácil concluir que origina –x+2 como resultado final. Não podemos adicionar –x com o 2 porque são monómios com partes literais diferentes. Nunca, desde que a Álgebra foi desenvolvida de forma tão sublime por Evariste Galois, matemático francês, por volta de 1830, -x+2 pode ser visto como sendo o polinómio x.x-4, como pretende o IAVE e atribuir 3 pontos, em 4 possíveis, estando a resposta do aluno totalmente errada.

O aluno, à medida que navega no mar cada vez mais turbulento dos polinómios, mas que confere um poder de controlo algébrico a quem dominar os Adamastores que vai encontrando, vai retendo alguns casos especiais, como é o caso dos chamados casos notáveis da multiplicação de polinómios. Um dos mais famosos casos notáveis é a diferença de quadrados x.x-a.a=(x-a)(x+a). Este caso notável é uma ferramenta muito útil porque permite transformar uma adição de dois monómios numa multiplicação de dois monómios, de uma forma bastante simples. O único processo de cálculo existente é o de encontrar a raiz quadrada do monómio que é só representado pelo seu coeficiente. Se for um número inteiro, o aluno trabalha com os números quadrados tais como o 1, 4, 9, 16, 25, 36, 64, 81, 100, … se não for, então o aluno deve escrever a simbologia caraterística da raiz quadrada respetiva do número. Por exemplo, x.x-16=(x-4)(x+4) porque 4x4=16, tal como x.x-4=(x-2)(x+2), porque 2x2=4. Mas, cuidado com a escrita. Pois o parêntesis aqui surge como elemento fundamental da escrita a diferenciar os dois fatores, de dois polinómios distintos, na multiplicação. Se tirarmos os parêntesis ficamos a ter uma adição de três monómios e não uma multiplicação de dois polinómios.

Pela forma como a questão é colocada na Prova Final de Matemática, claramente o objetivo era que o aluno conseguisse fatorizar, usando o caso notável, apercebendo-se que a raiz quadrada de quatro é dois. Para isso, o aluno tem de saber que o resultado é a multiplicação de dois polinómios, cada qual contendo uma adição de dois monómios, em que diferença reside apenas no monómio de grau zero. Isso consegue-se apenas com a colocação correta dos parêntesis, bem como a sua escrita exata. Não existe outra forma. Se o aluno não colocar os parêntesis nunca podemos saber se ele estaria a pensar ou não corretamente no assunto. Ele apenas transforma uma adição noutra adição e não na multiplicação desejada. Pontuação deveria ser zero.

Questão 14 da Prova Final de Matemática – 1ª Fase – 3º Ciclo do Ensino Básico, 2017.

14. Fatoriza o polinómio $x^2 - 4$.

Critérios de Correção, publicados em http://cdn.iave.pt/

A classificação é atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho.

Níveis	Descritores de desempenho	Pontuação
2	Responde «$(x-2)(x+2)$».	4
1	Responde «$x-2 \times x+2$».	3